関数 $y=e^{ax}\sin bx\,(b\neq 0)$ が, 次の関係をみたすような定数 a,b の値を求めよ。

$$y''-2y'+2y=0$$

〔熊本大〕

$y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$

$y''=a^2e^{ax}\sin bx+abe^{ax}\cos bx+abe^{ax}\cos bx-b^2e^{ax}\sin bx$

$\quad=(a^2-b^2)e^{a}\sin bx+2abe^{ax}\cos bx$

$(a^2-b^2)e^{ax}\sin bx+2abe^{ax}\cos bx-2ae^{ax}\sin bx-2be^{ax}\cos bx+2e^{ax}\sin bx$

$=(a^2-b^2-2a+2)e^{ax}\sin bx+(2ab-2b)\cos bx=0$

$x=0,\ bx=\frac{\pi}{2}$ でないとするとき

$$\begin{cases} a^2-b^2-2a+2=0 & \cdots① \\ 2ab-2b=0 & \cdots② \end{cases}$$

② より $2b(a-1)=0$ $\quad b\neq 0$ より $\quad a=1$

$a=1$ aときのは

$1-b^2-2+2=0$

$b^2=1 \qquad b=\pm 1$

$\therefore\ \underline{a=1,\ b=\pm 1}$