曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における法線が直線 $y=x$ と交わる点を Q とするとき, PQ の長さ l を x_0 で表せ。また, $\displaystyle\lim_{x_0\to 1} l$ を求めよ。 〔工学院大〕

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

P における法線は $y=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+y_0$ より

$y=x_0^2x-x_0^3+\dfrac{1}{x_0}$ …① $\left(\because y_0=\dfrac{1}{x_0}\right)$

① と $y=x$ の交点は

$(1-x_0^2)x=-x_0^3+\dfrac{1}{x_0}$

$x_0(1-x_0^2)x=-x_0^4+1$

$x_0(1-x_0^2)x=(1-x_0^2)(1+x_0^2)$ $x_0\neq 1$ とすると

$x=\dfrac{1+x_0^2}{x_0}=y$ $\therefore Q\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}, x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)$

$\therefore$

$l=\sqrt{\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}-x_0\right)^2+\left(x_0+\cancel{\dfrac{1}{x_0}}-\cancel{\dfrac{1}{x_0}}\right)^2}$

$l=\sqrt{x_0^2+\dfrac{1}{x_0^2}}$

$\displaystyle\lim_{x_0\to 1} l=\lim_{x_0\to 1}\sqrt{x_0^2+\dfrac{1}{x_0^2}}=\sqrt{2}$

(答) $\therefore\begin{cases} l=\sqrt{x_0^2+\dfrac{1}{x_0^2}} \\ \displaystyle\lim_{x_0\to 1} l=\sqrt{2}\end{cases}$