3C微分32

P 訂正あり

2つの曲線 $y = cx^2$ (c は定数), $y = \log x$ がともに1点 (a, b) を通り，この2つの曲線の P における接線が一致しているとする。

(1) a, b, c の値を求めよ。

(2) 上の2つの曲線は P 以外の点を共有するかどうか調べよ。

〔立教大〕

$b = ca^2$ …① $b = \log a$ …②

$f(x) = cx^2$ $g(x) = \log x$ とすると

$f'(x) = 2cx$ $g'(x) = \frac{1}{x}$ となり 点Pにおける接線を2通りで表すと

$y = 2ca(x-a)+b \rightarrow y = 2cax - 2ca^2 + b$ …③

$y = \frac{1}{a}(x-a)+b \rightarrow y = \frac{1}{a}x - 1 + b$ …④

③,④が一致することから

$\left.\begin{array}{l} 2ca = \frac{1}{a} \\ -2ca^2 + b = -1 + b \end{array}\right\}$ より $2ca^2 = 1$ …⑤

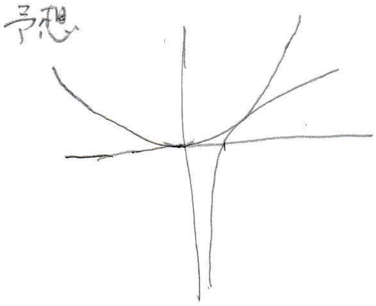
⑤と①より

$2b = 1$ $b = \frac{1}{2}$ ②より $\log a = \frac{1}{2}$ $a = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ これと⑤より

$2e\,c = 1$ $c = \frac{1}{2e}$ 以上より $a = \sqrt{e}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2e}$

(2) $f(x) = \frac{1}{2e}x^2$, $g(x) = \log x$

予想



$F(x) = f(x) - g(x)$ の増減を調べる ($\because x > 0$)

$F(x) = \frac{1}{2e}x^2 - \log x$

$F'(x) = \frac{1}{e}x - \frac{1}{x}$ $e = x$

$F'(x) = 0$ とすると $x = \pm\sqrt{e}$ $x > 0$ より $x = \sqrt{e}$ で極小値をとる。このときグラフの増減を調べると下のようになり

x	0	…	$\sqrt{e}$	…
$f'(x)$	/	−	0	+
$f(x)$	/	↘	0	↗

$x > \sqrt{e}$ で $F(x)$ は単調増加となる。よって $x = \sqrt{e}$ 以外に共有点はない。