3C微分33

曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上の点を (x_0, y_0) とする。ただし, $a>0,\ x_0y_0 \fallingdotseq 0$ とする。

(1) 点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ。

(2) (1) の接線と x 軸, y 軸との交点をそれぞれ, P, Q とするとき, 線分 PQ の長さを求めよ。

〔福岡大〕

(1) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$ $\quad y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=-x^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$ となるので点 (x_0, y_0) における接線の式は

$y=-\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{-\frac{1}{3}}(x-x_0)+y_0$ $\quad y=-\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{-\frac{1}{3}}x+\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{-\frac{1}{3}}x_0+y_0$

$y=-\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}x+\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}x_0+y_0$

$y=-\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}x+(x_0^2y_0)^{\frac{1}{3}}+y_0$ $\quad \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}x+y=(x_0^2y_0)^{\frac{1}{3}}+y_0$ より

両辺 $(y_0)^{\frac{1}{3}}$ でわると

$\left(\frac{1}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}x+\left(\frac{1}{y_0}\right)^{\frac{1}{3}}y=(x_0)^{\frac{2}{3}}+(y_0)^{\frac{2}{3}}$ ここで $x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ であるから

接線の式は $\quad \frac{x}{\sqrt[3]{x_0}}+\frac{y}{\sqrt[3]{y_0}}=\sqrt[3]{a^2}$

(2)

y 軸との交点は $x=0$ とすると $\quad y=\sqrt[3]{a^2y_0}$ $\quad \therefore Q\left(0, \sqrt[3]{a^2y_0}\right)$

x 軸との交点は $y=0$ とすると $\quad x=\sqrt[3]{a^2x_0}$ $\quad \therefore P\left(\sqrt[3]{a^2x_0}, 0\right)$

$$
\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{(a^2x_0)^{\frac{2}{3}}+(a^2y_0)^{\frac{2}{3}}} \\
&= a^{\frac{4}{3}}\cdot x_0^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}\cdot y_0^{\frac{2}{3}} \\
&= \sqrt{a^{\frac{4}{3}}\cdot\left(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}\right)} \\
&= \sqrt{a^{\frac{6}{3}}} \\
&= \sqrt{a^2} \\
&= a
\end{aligned}
$$

$\therefore a$