3C微分34

曲線 $y=e^{-x^2}$ に x 軸上の点 $(a,\,0)$ から接線を引く。

(1) 異なる 2 本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよ。

(2) ただ 1 本の接線が引けるときの a の値, および接点の座標を求めよ。

〔愛知工大〕

(1) $f(x)=e^{-x^2}$ とおく, $f(x)$ 上の点を $(t,\ e^{-t^2})$ とすると

接線の式は $f'(x)=-2xe^{-x^2}$ より

$y=-2te^{-t^2}(x-t)+e^{-t^2}$ これが $(a,0)$ を通ることより

$0=-2te^{-t^2}(a-t)+e^{-t^2}$ $e^{-t^2}>0$ として両辺を e^{-t^2} でわると

$2t^2-2at+1=0$ …① となり この方程式が異なる2つの実数解をもてばよいので 判別式 $D/4>0$ とすると

$a^2-2>0$ $a^2>2$ となり $\underline{a<-\sqrt{2},\ a>\sqrt{2}}$

(2) ただ1本の接線が引けるということは(1)の①の解がただ1つの実数解をもつときで、そのとき判別式 $D/4=0$ となることから、

$a^2=2$ $\therefore\ a=\pm\sqrt{2}$

答

$a=\sqrt{2}$ のとき $2t^2-2\sqrt{2}t+1=0$ $(\sqrt{2}t-1)^2=0$ $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

接点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$

$a=-\sqrt{2}$ のとき $2t^2+2\sqrt{2}t+1=0$ $(\sqrt{2}t+1)^2=0$ $t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

接点 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$