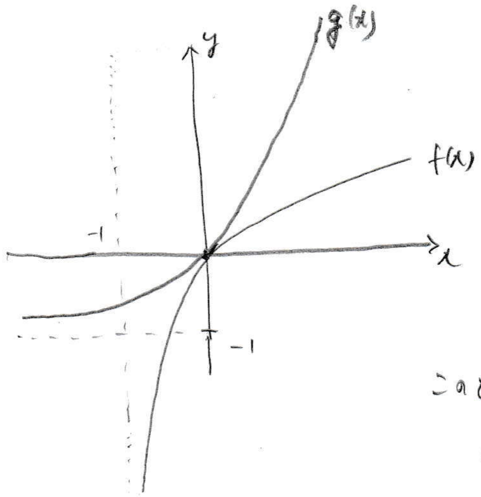
2 曲線 $y = \log(x+1)$, $y = e^x - 1$ はただ 1 点を共有し, その点で接することを証明せよ。 〔滋賀医大〕

$f(x) = \log(x+1)$ $g(x) = e^x - 1$ とおく ∵真数条件より $x > -1$.



$h(x) = g(x) - f(x)$ として

極小値が 0 でありそのときの x の値以外で

$h(x) > 0$ となることを示す

$h(x) = e^x - 1 - \log(x+1)$ ($\because x > -1$)

このとき

$$h'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$$
$$= \frac{e^x(x+1) - 1}{x+1}$$

$h'(x) = 0$ とおくと $x = 0$ のとき $h'(x) = 0$ となる
増減表をかくと左図のようになる
また

$$\lim_{x \to \infty} h'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x(x+1) - 1}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \infty$$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$h'(x)$	/	$-$	0	$+$	∞
$h(x)$	/	↘	0	↗	∞

∴ $h(x)$ は $x = 0$ で極小かつ最小値をとり その値は 0 である また
$h(x)$ は $x = 0$ 以外で $h(x) > 0$ であることから
$f(x)$ と $g(x)$ は $x = 0$ で接する 接点の座標は原点 $(0, 0)$ である.