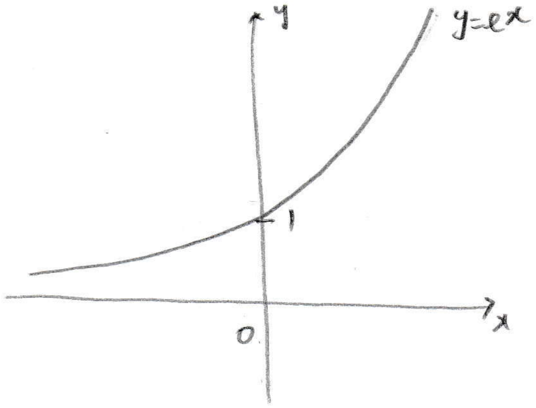
曲線 $y=e^x$ に点 (a,b) から引きうる接線の個数を求めよ。 〔東京工大〕



$y'=e^x$ $y=e^x$上の点を(t, e^t)とし

接線の方程式を求めると

$y=e^t(x-t)+e^t$

これが(a, b)を通ることから

$b=e^t(a-t)+e^t$

$b=ae^t-te^t+e^t$

$b=e^t(a-t+1)$

∴ $g(t)=a$ $f(t)=e^t(a-t+1)$ とおくと $g(t)$と$f(t)$の交点の数が接線の個数になる。

$f'(a)=e^t(a-t+1)-e^t$

$=e^t(a-t)$ $e^t>0$より $t=a$のとき極値をとる

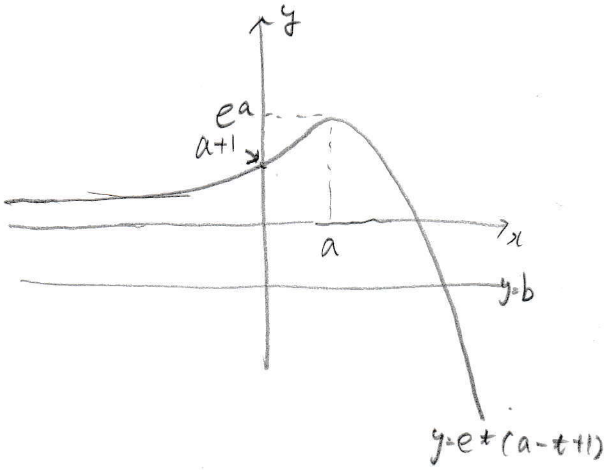
x	$-\infty$	$\cdots$	a	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e^a	↘	$-\infty$

$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty} e^t(a-t+1)$

$\lim_{t\to-\infty} f(t)=\lim_{h\to\infty} e^{-h}(a+h+1)$

$t=-h$として

$=\lim_{h\to\infty}\dfrac{a+h+1}{e^h}=0.$



∴

(答) $\begin{cases} b>e^a & 0個 \\ b=e^a & 1個 \\ 0<b<e^a & 2個 \\ b\leqq 0 & 1個 \end{cases}$