3C微分37

関数 $y = e^{2x} + ae^x + 2x$ の極大値と極小値の和が -11 となるように定数 a を定めよ。

〔群馬大〕

$f(x) = e^{2x} + ae^x + 2x$ とおくと

$f'(x) = 2e^{2x} + ae^x + 2$ $e^x = t$ とおいて ($\because t > 0$)

t についての二次方程式をみると

$2t^2 + at + 2 = 0$ この方程式の解を α, β として ($\alpha < \beta$)

$\alpha + \beta = -\frac{a}{2}$ $\alpha\beta = 1$ …①

異なる2つの解 α, β が存在するためには判別式 $D > 0$

$a^2 - 16 > 0$ $a < -4$ $a > 4$ …②

ここで ①における α, β はともに $t > 0$ であるから $\alpha + \beta > 0$ となり

a の符号は $-\frac{a}{2} > 0$ より $a < 0$ …③

②, ③より $a < -4$ …④ となる

$f(x)$ を同様に $e^x = t$ とすると $x = \log t$ であるから

$f(t) = t^2 + at + 2\log t$ となり

α, β で極値をとることから

$f(\alpha) = \alpha^2 + a\alpha + 2\log\alpha$ $f(\beta) = \beta^2 + a\beta + 2\log\beta$

題意より $f(\alpha) + f(\beta) = -11$ であるから

$(\alpha^2 + a\alpha + 2\log\alpha) + (\beta^2 + a\beta + 2\log\beta) = -11$

$\alpha^2 + \beta^2 + a(\alpha + \beta) + 2\log\alpha + 2\log\beta = -11$

$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + a(\alpha + \beta) + \log(\alpha\beta)^2 = -11$

①より

$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - 2 - \frac{a^2}{2} + \log 1^2 = -11$

$\frac{a^2}{4} - 2 - \frac{a^2}{2} = -11$

$\frac{a^2}{4} = 9$

$a^2 = 36$

$a = \pm 6$ $\because a < -4$ より

$a = -6$