



$y = \frac{a}{b + e^{-cx}}$ (a, b, c は正の定数) とするとき,

(1) 導関数 y' を y の多項式で表わせ。

(2) y' を最大にする x の値を求めよ。

$$y' = \frac{ace^{-cx}}{(b + e^{-cx})^2} = \frac{a}{b + e^{-cx}} \cdot \frac{a}{b + e^{-cx}} \cdot \frac{c}{a} e^{-cx} \quad \text{[大阪市大]}$$

$$= y^2 \cdot \frac{c}{a} e^{-cx} \quad \text{①}$$

ここで式変形

$$(b + e^{-cx})y = a \quad \text{②}$$

$$ye^{-cx} = a - by$$

$$e^{-cx} = \frac{a}{y} - b \quad \text{②} \quad \text{①, ②より}$$

$$y' = \frac{c}{a} y^2 \left(\frac{a}{y} - b \right) \quad \text{③}$$

$$y' = -\frac{bc}{a} y^2 + cy$$

(2) y' は y の2次関数である

$$y' = -\frac{bc}{a} \left(y^2 - \frac{a}{b} y \right) = -\frac{bc}{a} \left(y - \frac{a}{2b} \right)^2 + \frac{ac}{4b}$$

③より y' は $y = \frac{a}{2b}$ 時に最大

②より $e^{-cx} = \frac{a}{\frac{a}{2b}} - b = 2b - b = b$

$$e^{-cx} = b \quad \text{④}$$

$$\log e^{-cx} = \log b$$

$$-cx = \log b$$

$$x = -\frac{\log b}{c}$$

