3C 微積 44

曲線 $y = -x\log x$ $(0 < x < 1)$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(t, -t\log t)$ における法線が x 軸と交わる点を $\mathrm{Q}(a, 0)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a を t の式で表せ。

(2) $a < t$ であるような実数 t の範囲を求めよ。

(3) t が (2) で求めた範囲にあるとき，3 点 P, Q, H$(t, 0)$ を頂点とする三角形 PQH の面積 $S(t)$ を t の式で表せ。

(4) t が (2) で求めた範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

〔東京農工大〕

(1) $y' = -\log x - x \cdot \frac{1}{x}$　∴ P における法線は

$= -\log x - 1$

$y = \frac{1}{\log t + 1}(x - t) - t\log t$ …①

①が Q$(a, 0)$ を通るので　$0 = \frac{1}{\log t + 1}(a - t) - t\log t$

$a - t - t\log t(\log t + 1) = 0$

$\underline{a = t\log t(\log t + 1) + t}$ //

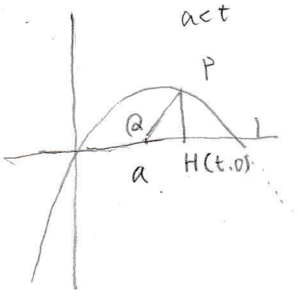
(2) $a < t$ より　$a - t < 0$　(1) より　$a - t = t\log t(\log t + 1)$ であるから

$t\log t(\log t + 1) < 0$　$0 < t < 1$ のとき　$\log t < 0$ であるから

$\log t + 1 > 0 \to \log t > -1$　以上より　$-1 < \log t < 0$ となり

ゆえに　$\underline{\frac{1}{e} < t < 1}$ //

(3)



$QH = t - a$　$PH = -t\log t$ より

$S(t) = \frac{1}{2}(t - a)(-t\log t)$　(1) より　$t - a = -t\log t(\log t + 1)$

であるから

$S(t) = \frac{1}{2}\{-t\log t(\log t + 1)\}(-t\log t)$

$\underline{S(t) = \frac{1}{2}t^2\{(\log t)^3 + (\log t)^2\}}$ //

(4) $S'(t) = t\{(\log t)^3 + (\log t)^2\} + \frac{1}{2}t^2\{3(\log t)^2 \cdot \frac{1}{t} + 2\log t \cdot \frac{1}{t}\}$

$= t(\log t)^3 + t(\log t)^2 + \frac{3}{2}t(\log t)^2 + t\log t$

$= t(\log t)^3 + \frac{5}{2}t(\log t)^2 + t\log t$

$= \frac{1}{2}t\log t\{2(\log t)^2 + 5\log t + 2\}$

$= \frac{1}{2}t\log t(\log t + 2)(2\log t + 1)$

$\frac{1}{e} < t < 1$ より $S(t)$ は $t = e^{-\frac{1}{2}}$ つまり $t = \frac{1}{\sqrt{e}}$ のとき極値をとる

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{1}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$\frac{1}{16e}$	↘	

増減表は左のようになり $t = \frac{1}{\sqrt{e}}$ で極大かつ最大値 $\frac{1}{16e}$ となる