3Cビ分45

関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ を考え, 曲線 $y=f(x)$ を C とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の増減表をつくり, C のグラフをかけ。また, C はただ 1 つの変曲点 P をもつことを示し, P の座標を求めよ。

(2) (1) で求めた点 P を通り, 傾きが m の直線を l とする。l と C とが点 P 以外に異なる 2 点 Q, R で交わるような m の値の範囲を求めよ。

(3) (2) に現れる 3 点 P, Q, R および傾き m について, 線分 QR の中点は m の値に関係なく点 P であることを証明せよ。

〔徳島大〕

(1) $f'(x)=3x^2-12x+9$
$=3(x^2-4x+3)$
$=3(x-1)(x-3)$

$f''(x)=6x-12$
$=6(x-2)$

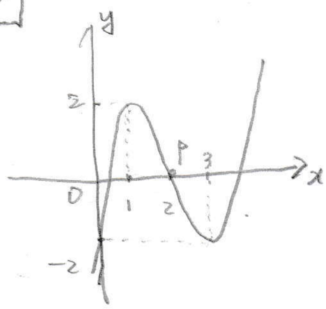
変曲点

x	…	1	…	2	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	↗	2	↘	0	↘	−2	↗

$f(1)=2$

$f(3)=-2$

$P(2,0)$



(2) 傾き m で $P(2,0)$ を通る式を $y=m(x-2)$ とすると

$x^3-6x^2+9x-2=m(x-2)$ とする

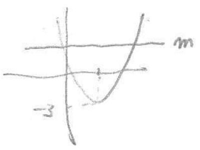
このときこの方程式の解に $x=2$ を含むことから

左辺を $(x-2)$ でくくってみると

$(x-2)(x^2-4x+1)-m(x-2)=0$ とでき

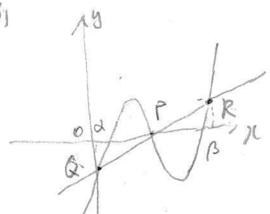
$(x-2)(\underbrace{x^2-4x+1-m}_{①})=0$

ここで下線①は $g(x)=x^2-4x+1$, $h(x)=m$ として考えたとき $g(x)$ と $h(x)$ が交点を2つもてばよいことが分かる. $g(x)=(x-2)^2-3$ なので



$m>-3$ となる　　$\underline{m>-3}$

(3)



交点の x 座標を α, β $(\beta>\alpha)$ とすると (2) の下線①より

$x^2-4x+1-m=0$ から 解と係数の関係より

$(\alpha+\beta=4 \quad \alpha\beta=1-m)$ …A

ここで $x=\alpha$ の座標Qと $x=\beta$ の座標Rの中点の座標を求めると

$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^3+\beta^3-6(\alpha^2+\beta^2)+9(\alpha+\beta)-4}{2}\right)$ となり A より $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=2$

であるから $\alpha^3+\beta^3-6(\alpha^2+\beta^2)+9(\alpha+\beta)-4=0$ … B が成り立てばよい

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=64-12(1-m)=52+12m$ …(i)

$-6(\alpha^2+\beta^2)=-6\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=-96+12(1-m)=-12m-84$ (ii)

$9(\alpha+\beta)=36$ …(iii)

これより B は

$52+12m-12m-84+36-4=0$ となる. よって l と $f(x)$ の交点 QR の中点の座標は m に関係なく $P(2,0)$ となる