双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式が $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ で表わされることを示せ。

双曲線を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{a^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}$$

このとき点 (x_1, y_1) における接線は

$$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1$$

$$a^2y_1y=b^2x_1x-b^2x_1^2+a^2y_1^2$$

$$b^2x_1x-a^2y_1y=b^2x_1^2-a^2y_1^2$$

両辺 a^2b^2 でわると

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}$$

ここで右辺は1であるから接線の式は

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

となる