次の問いに答えよ。

(1) 曲線上の点 $\mathrm{P}(a,\,0)$ から曲線 $y=xe^x$ に2本の接線がひけるための a の条件を求めよ。

(2) $a=\dfrac{1}{2}$ のときの接線の方程式を求めよ。

〔慶応〕

(1) $y'=xe^x+e^x$ より

曲線上の点 $(t,\,te^t)$ における接線は

$y=e^t(t+1)(x-t)+te^t$ と表せる

これが $\mathrm{P}(a,0)$ を通ることから

$0=e^t(t+1)(a-t)+te^t$

両辺を e^t でわって

$(t+1)(a-t)+t=0$

$at-t^2+a-t+t=0$

$t^2-at-a=0$ …①

これが異なる2つの~~実数~~解をもてばよいので

判別式 $D>0$ とすればよい

$a^2+4a>0$

$a(a+4)>0$

よって $a<-4,\ a>0$

(2) $a=\frac{1}{2}$ のとき ①は

$2t^2-t-1=0$ となり

$(t-1)(2t+1)=0$

$t=1,\ -\frac{1}{2}$

$t=1$ のとき

$y=2e(x-1)+e$ より

$y=2ex-e$

$t=-\frac{1}{2}$ のとき

$y=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}x+\dfrac{1}{4\sqrt{e}}-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$

$y=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}x-\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$

以上より $y=2ex-e,\ y=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}x-\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$