(1) $e^x \geqq 1+x$ より

$f(x) = e^x - 1 - x$ とおく

$f'(x) = e^x - 1$

$f(x)$の増減表をかくと

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

となり すべての実数において

$f(x) \geqq 0$ である 等号成立は $x=0$ のとき

よって

$e^x \geqq 1+x$ である

(2) $e^{-x^2} \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$ より

$g(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - e^{-x^2}$ とおくと

$$g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + 2xe^{-x^2}$$

$$= \frac{-2x + 2x(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2x\{1-(1+x^2)\}}{(1+x^2)^2}$$

$g(x)$の増減表をかくと

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

となり すべての実数において

$g(x) \geqq 0$ となる 等号成立は $x=0$ のとき

よって

$e^{-x^2} \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$ である

(3) $\dfrac{e-1}{e} < \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx < \dfrac{\pi}{4}$

(2)より

$\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ であり 右側の

値を求めると

$x = \tan\theta$ とおくと $dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$x \quad 0 \to 1$

$\tan\theta \quad 0 \to \dfrac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

また

$0 \leqq x \leqq 1$ において

$e^{x^2} < e^x$ なので

$e^{-x} < e^{-x^2}$ であるから

$$\int_0^1 e^{-x}dx < \int_0^1 e^{-x^2}dx$$

左側の値を求めると

$$\int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -e^{-1} + 1$$

$$= 1 - \frac{1}{e}$$

$$= \frac{e-1}{e}$$

以上より

$\dfrac{e-1}{e} < \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx < \dfrac{\pi}{4}$ が成り立つ