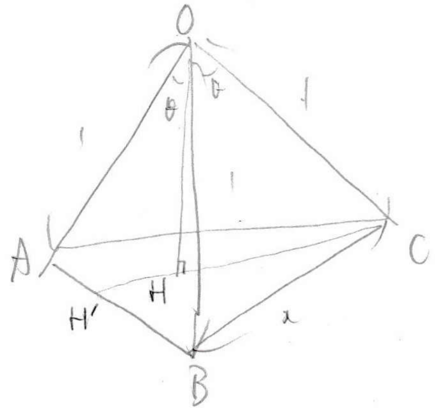

$AB=BC=CA=x$ とおくと

余弦定理より

$$x^2=1+1-2\cos\theta$$

$$x^2=2-2\cos\theta$$

$OA=OB=OC$ より Oから$\triangle ABC$におろした垂線OHのHは$\triangle ABC$の重心なので

ABの中点をH'とすると

$$CH=\frac{2}{3}CH'=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

よって $\triangle OHC$で三平方の定理より

$$OH=\sqrt{1-CH^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}$$

$\triangle ABC$は一辺xの正三角形なのでその面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

したがって求める体積Vは

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}(2-2\cos\theta)\sqrt{1-\frac{1}{3}(2-2\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}(1-\cos\theta)\sqrt{\frac{1+2\cos\theta}{3}}$$

$$=\frac{1}{6}(1-\cos\theta)\sqrt{1+2\cos\theta}$$

よって

$$\underline{\frac{1}{6}(1-\cos\theta)\sqrt{1+2\cos\theta}}$$

(2) $$V=\frac{1}{6}(1-\cos\theta)\sqrt{1+2\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{(1-\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)}$$ とし

$v(\theta)=(1-\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)$

$0°<\theta<120°$ を考えると

$$v'(\theta)=2(1-\cos\theta)\sin\theta(1+2\cos\theta)-2\sin\theta(1-\cos\theta)^2$$

$$=2\sin\theta\{(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)-(1-\cos\theta)^2\}$$

$$=2\sin\theta(\cancel{1}+2\cos\theta-\cos\theta-2\cos^2\theta-\cancel{1}+2\cos\theta-\cos^2\theta)$$

$$=2\sin\theta(-3\cos^2\theta+3\cos\theta)$$

$$=-6\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-1)$$

$v'(\theta)=0$ となるのは $\theta=90°$ のとき $v(\theta)$は最大値1をとる

θ	0	…	90°	…	120°
$v'(\theta)$		+	0	−	
$v(\theta)$		↗	1	↘	

このときVも最大となり $V=\frac{1}{6}$ である

よって $\theta=90°$で体積は最大値 $\frac{1}{6}$ となる

$\underline{\theta=90°}$