3C特 11

$-x^2$

曲線 $y=e^{-x}$ (e は自然対数の底) に x 軸上の点 $(a, 0)$ から接線をひく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 異なる 2 本の接線がひけるような a の範囲を求めよ。

(2) ただ 1 本の接線がひけるときの a の値, および接点の座標を求めよ。

〔愛知工大〕

(1) $y' = -2xe^{-x^2}$ グラフ上の点を $P(t, e^{-t^2})$ とすると

点 P における接線は

$y = -2te^{-t^2}(x-t) + e^{-t^2}$ となりこれが点 $(a, 0)$ を通るから

$0 = -2te^{-t^2}(a-t) + e^{-t^2}$

$2t^2e^{-t^2} - 2ate^{-t^2} + e^{-t^2} = 0$ $e^{-t^2} \neq 0$ より

$2t^2 - 2at + 1 = 0$ これがことなる2つの ~~実数~~ 解をもてば

よいので, 判別式 $D/4 > 0$ $a^2 - 2 > 0$

$\therefore$ $a < -\sqrt{2}$ $\sqrt{2} < a$

(2) ただ1本の接線がひけるということは

(1) での方程式 $2t^2 - 2at + 1 = 0$ が重解をもてばよい

$\therefore$ $a^2 - 2 = 0$ これより $a = \pm\sqrt{2}$

$a = \sqrt{2}$ のとき方程式は $2t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$ となり

$(\sqrt{2}t - 1)^2 = 0$ より $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

接点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$

$a = -\sqrt{2}$ のとき同様にして $t = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

接点 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$