記 不等12

すべての正の数 x に対して，不等式 $\sqrt{x} > a\log x$ が成り立つような a の範囲を求めよ。ただし，対数は自然対数である。 〔広島大〕

$f(x) = \sqrt{x} - a\log x$ とおく

i) $a<0$ のとき $\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$ であるが $\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$ となるので成り立たない

ii) $a=0$ のとき $f(x) = \sqrt{x} > 0$ で成り立つ

iii) $a>0$ のとき $f(x) = \sqrt{x} - a\log x$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{a}{x} = \frac{x-2a\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}-2ax}{2x^2} \quad x>0 より$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2a}{2x}$$

$\sqrt{x}-2a=0$ とすると $x=4a^2$ となりこの前後で $f'(x)$ は符号が変わる

極値をみると $f(4a^2) = 2a - a\log 4a^2 = 2a - a\log(2a)^2$

$= 2a(1-\log 2a)$

となりこの値が正であればよいので

$2a(1-\log 2a) > 0$ $a>0$ より $1-\log 2a > 0$ であればよい

$\therefore$ $\log 2a < 1$

$2a < e$

$a < \frac{e}{2}$

i) ii) iii) より 求める範囲は

$$\underline{0 \leq a < \frac{e}{2}}$$