GOOD JOB!

3C不試14

a, b を定数とするとき, 曲線 $y = a\cos x + b$ が次の2条件をみたしているとする。

(i) 曲線 $y = a\cos x + b$ は点 $(0,\ 1)$ を通る。

(ii) 2曲線 $y = a\cos x + b$ と $y = 4\sin^2 x$ は $0 < x < \pi$ の範囲で1つの点Pを共有し, この点Pにおける両曲線の接線は一致する。

点Pのx座標をθとする

$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$1 - \cos^2 x$　$1 - \sin^2 x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$2\cos^2 - 1$

(1) a, b, θ の値を求めよ。

(2) $-\theta \leqq x \leqq \theta$ のとき, $a\cos x + b \geqq 4\sin^2 x$ であることを示せ。

(3) $-\theta \leqq x \leqq \theta$ の範囲で, 2曲線 $y = a\cos x + b$, $y = 4\sin^2 x$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$y = \dfrac{4(1-\cos 2x)}{2}$

〔宮城教育大〕

(1) (i)より　$a + b = 1 \cdots ①$

点Pを $(\theta,\ a\cos\theta + b)$, $(\theta,\ 4\sin^2\theta)$ とすると $y' = -a\sin\theta$, $y' = 4\sin 2\theta$

$a\cos\theta + b = 4\sin^2\theta = 4(1-\cos^2\theta)$

$4\cos^2\theta + a\cos\theta + b - 4 = 0$　これが重解をもつので判別式 $D=0$

$a^2 - 16(b-4) = 0$　$b = 1-a$ より(①から)

$a^2 - 16(-3-a) = 0$　$a^2 + 16a + 48 = 0$　$(a+12)(a+4) = 0$, $a = -12$ とすると $b = 13$ となり $0 < 4\sin^2\theta < 4$ にあわない

$\therefore a = -4$ より $b = 5$　$4\sin\theta = 4\sin 2\theta$ であるから $\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ となり

$\sin\theta(2\cos\theta - 1) = 0$　$\sin\theta \neq 0$ より $2\cos\theta = 1$　$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$　以上より $a = -4,\ b = 5,\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$

(2) (1)より $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ とし $f(x) = -4\sin^2 x - 4\cos x + 5$ を考える

$f(x) = -2(1-\cos 2x) - 4\cos x + 5$ とでき $f'(x) = -4\sin 2x + 4\sin x$ となり

$f'(x) = -4(2\sin x\cos x - \sin x)$ $\therefore f'(x) = -4\sin x(2\cos x - 1)$ となる

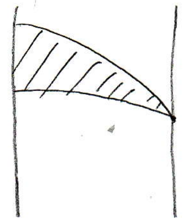
$f'(x) = 0$ とすると $x = -\dfrac{\pi}{3}, 0, \dfrac{\pi}{3}$ で極値をとる

x	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

$\therefore$ 左の増減表により $f(x)$ は $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で常に $f(x) \geqq 0$

従って $-4\cos x + 5 \geqq 4\sin^2 x$ が成り立つ

(3)



$\dfrac{\pi}{3}$　$-\dfrac{\pi}{3}$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (-4\cos x + 5 - 4\sin^2 x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos 2x - 4\cos x + 3)\,dx$$

$$= \Big[\sin 2x - 4\sin x + 3x\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} + \pi\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} - \pi\right)$$

$$= 2\pi - 3\sqrt{3}$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

GOOD JOB!