

3C不等式 #16

$x > 0$ のとき, $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ であることを示せ。

[弘前大]

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = e^x - x - 1$$

$f'(x) = 0$ とおくと

$$x = 0$$

$$x > 0 \text{ と}$$

$$f'(x) > 0$$

と分かる。

$f(x)$ は $x > 0$ で

単調増加

$x = 0$ で $f(x) = 0$ であるから

$$x > 0 \text{ と } f(x) > 0$$

よって $x > 0$ のとき

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ が成り立つ}$$

与えられた不等式は

$$F(x) = e^x \dots \textcircled{1}$$

$$G(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$= \frac{1}{2} (x+1)^2 + \frac{1}{2} \dots \textcircled{2}$$

よって $x > 0$ のとき

