(1) xを任意の実数とするとき, $e^x \geqq 1+x$を証明せよ。

(2) (1)の結果を用いて, 任意の実数xに対して,

$$e^{x^2} \geqq 1+x^2,\ \text{かつ}\ \frac{1}{1+x^2} \geqq e^{-x^2} \cdot \cos^2 x$$

を証明せよ。

〔岩手医大〕

(1) $f(x) = e^x - x - 1$ とし $f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ のときで このとき $f(x)$ は極値をとる.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$　$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ より

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(x)$は任意の実数に対して $f(x) \geqq 0$　∴ $e^x \geqq 1+x$ となる.

(2)

(1)の結果を

$e^t \geqq 1+t$ とすると $t = x^2$ とすると

$e^{x^2} \geqq 1+x^2$ で成り立つ …①

①を変形すると

$\dfrac{1}{1+x^2} \geqq e^{-x^2}$ が得られる.

ここで $\cos^2 x$ は $0 \leqq \cos^2 x \leqq 1$ より

$\dfrac{1}{1+x^2} \geqq e^{-x^2} \cdot \cos^2 x \geqq 0$ が成り立つ