$0 < x \leqq 1$ のとき，

$$1 + \frac{8}{10}x < (1+x)^{\frac{9}{10}} < 1 + \frac{9}{10}x$$

を証明せよ。　〔名古屋工大〕

i) $1+\frac{8}{10}x < (1+x)^{\frac{9}{10}}$ の証明

$\log\left(1+\frac{8}{10}x\right) < \log(1+x)^{\frac{9}{10}}$ として　($\because$ 底は e)

$f(x) = \frac{9}{10}\log(1+x) - \log\left(1+\frac{8}{10}x\right)$ とおくと

$$f'(x) = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{\frac{8}{10}}{1+\frac{8}{10}x} = \frac{9}{10(1+x)} - \frac{4}{5+4x}$$

$$= \frac{5-4x}{10(x+1)(4x+5)}$$

ここで　$0 < x \leqq 1$ では $f'(x) > 0$ なのでこの区間で $f(x)$ は増加関数であり $f(0) = 0$

$\therefore$ $\log\left(1+\frac{8}{10}x\right) < \log(1+x)^{\frac{9}{10}}$

底は e なので　$1+\frac{8}{10}x < (1+x)^{\frac{9}{10}}$

ii) $(1+x)^{\frac{9}{10}} < 1+\frac{9}{10}x$ の証明

$g(x) = 1+\frac{9}{10}x - (1+x)^{\frac{9}{10}}$

$g'(x) = \frac{9}{10} - \frac{9}{10}(1+x)^{-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[10]{1+x}}\right)$ となり

$0 < x \leqq 1$ では $g'(x) > 0$ かつ $g(0) = 0$ よって　この区間で $g(x)$ は増加関数 $\therefore$ $g(x) > 0$

ゆえに　$(1+x)^{\frac{9}{10}} < 1+\frac{9}{10}x$

i)ii) より　$0 < x \leqq 1$ のとき

$1+\frac{8}{10}x < (1+x)^{\frac{9}{10}} < 1+\frac{9}{10}x$ が成り立つ