3C不等式19

$a>0$とする。このとき，$x>0$の範囲で不等式

$(x^2-2ax+1)e^{-x}<1$

が成り立つことをを証明せよ。ただし，eは自然対数の底である。〔奈良女子大〕

与式の両辺にe^xをかけると

$x^2-2ax+1<e^x$

$f(x)=e^x-x^2+2ax-1$ として $f'(x)$を求める

$f'(x)=e^x-2x+2a$

このf'(x)が $x>0$ において $f(x)>0$ であればよい

$f''(x)=e^x-2$ であるから

$e^x-2=0$ として $x=\log 2$ で $f'(x)$は極値をもつ

x	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$f''(x)$	/	$-$	0	+
$f'(x)$	/	↘	極小	↗

$f'(\log 2)=2-2\log 2+2a$
$=2(1-\log 2)+2a>0$

$f'(x)$の極小値が正であり $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$ であるから

$f'(x)$は $x>0$ において つねに $f'(x)>0$

∴ $f(x)$は $x>0$において $f(x)>0$

また $x=0$の $f(x)=0$ である

従って

$x^2-2ax+1<e^x$

つまり

$(x^2-2ax+1)e^{-x}<1$

が成り立つ