3C不等式22

訂正あり

3.

不等式$\log(1+x) \leqq x - \dfrac{x^2}{2} + ax^2$が，すべての$x \geqq 0$に対して成り立つような実数$a$の範囲を求めよ。 〔島根大〕

$x \geqq 0$より $\log(1+x) \geqq 0$ $\therefore$ $x - \frac{x^2}{2} + ax^3 \geqq 0$ $x\left(1 - \frac{x}{2} + ax^2\right) \geqq 0$ より $a > 0$ …①

$f(x) = ax^3 - \frac{x^2}{2} + x - \log(1+x)$ として，すべての$x \geqq 0$について$f(x) \geqq 0$となることを示す

$$f'(x) = 3ax^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{(3ax^2 - x + 1)(1+x) - 1}{1+x} = \frac{3ax^2 + 3ax^3 \cancel{-x} - x^2 \cancel{+1} \cancel{+x} \cancel{-1}}{1+x}$$

$$= \frac{3ax^3 + (3a-1)x^2}{1+x} = \frac{x^2\{3ax + (3a-1)\}}{1+x}$$

$f'(x)$がすべての$x \geqq 0$について $f'(x) \geqq 0$であればよい

$3ax + (3a-1) \geqq 0$であればよいので

$$x + \frac{3a-1}{3a} \geqq 0 \qquad x \geqq 0 \text{より}$$

$\frac{3a-1}{3a} \geqq 0$ であればよい

$a \geqq \frac{1}{3}$ このとき $f'(x) \geqq 0$ となり①も満たす

逆に

$\frac{3a-1}{3a} < 0$ なら ①と合わせて $0 < a < \frac{1}{3}$ となるが，

$x = -\frac{3a-1}{3a}$ で極値をとることになる．このとき $f(0) = 0$より 小さい値(極小値)をとるので$x \geqq 0$でつねに$f(x) \geqq 0$とならない

$$\therefore \underline{a \geqq \frac{1}{3}}$$