3C不等 ?

次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき, $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ を証明せよ。

(2) (1) を利用して,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

を証明せよ。

(3) 方程式 $e^x = mx$ の実数解の個数は, 実数 m の値によってどのように変わるか。曲線 $y=\frac{e^x}{x}$ をえがくことによって, それを調べよ。

(1) $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$ とする $f'(x)=e^x-1-x$, $f''(x)=e^x-1$

$f''(x)$ は $x>0$ のとき $f''(x)>0$ でかつ $f'(0)=0$ であるから $x>0$ で $f'(x)>0$

また $f(0)=0$ 従って $x>0$ で $f(x)>0$ つまり $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$

(2) $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}>\frac{x^2}{2}$ 両辺の逆数をとると

$\frac{1}{e^x}<\frac{2}{2+2x+x^2}<\frac{2}{x^2}$ 両辺 x かけて

$\frac{x}{e^x}<\frac{2x}{2+2x+x^2}<\frac{2}{x}$ ここで $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ より

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ …① $e^x=t$ とおくと 両辺の対数をとると $x=\log t$ となり

$x\to\infty$ なら $t\to\infty$ であるから ①は

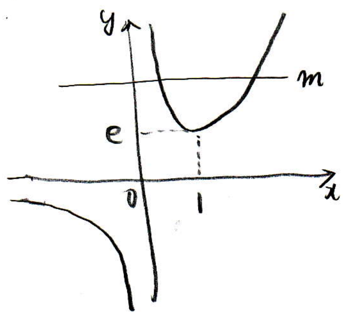
$\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ となる 以上で証明終り

(3) $y'=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ $x=1$ で極値をとる その値は e

$x\neq0$ として

$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$, $\lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x}=\infty$

x		0	…	1	…
y'	$-$	/	$-$	0	$+$
y	↘	/	↘	e	↗



グラフより

$m>e$ のとき 2個

$m=e$ のとき 1個

$m<0$ のとき 1個

$0\leqq m<e$ 0個

ごうかく!