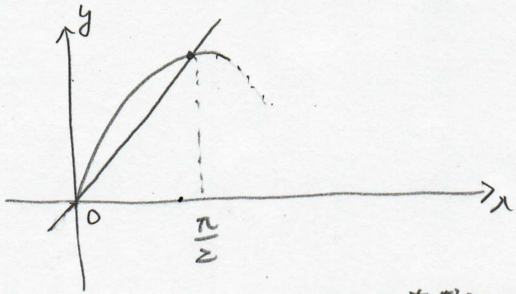
3C之寺 9

グラフの凹凸を利用して, 次のことを証明せよ。

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$

(2) $\alpha > 1, x > 0$ のとき, $x^\alpha \geqq \alpha(x-1)+1$

(1) $y=\sin x$, $y=\frac{2}{\pi}x$ のグラフを書くと以下のようである



よって $0<x<\frac{\pi}{2}$ の区間において

$y=\sin x$ は常に $y=\frac{2}{\pi}x$ の上にある.

$\therefore$ $\sin x > \frac{2}{\pi}x$

ちなみに $y''=-\sin x<0$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ なので

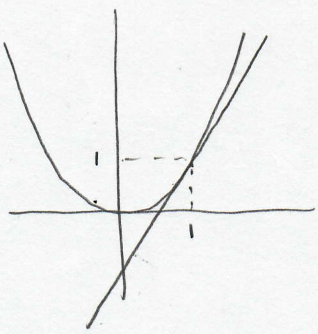
$y=\sin x$ はこの区間で上に凸である

(2)

$y=x^\alpha$, $y=\alpha(x-1)+1$ として

$y'=\alpha x^{\alpha-1}$

$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}>0$ であるから $x>0$ でグラフは下に凸である



ここでグラフ上の点 $P(1,1)$ における

接線は

$y=\alpha(x-1)+1$ となる. このことから

$x^\alpha \geqq \alpha(x-1)+1$ が成り立ち

等号は $x=1$ のときである