次の曲線の増減, 凹凸を調べて, そのグラフの概形をかけ。

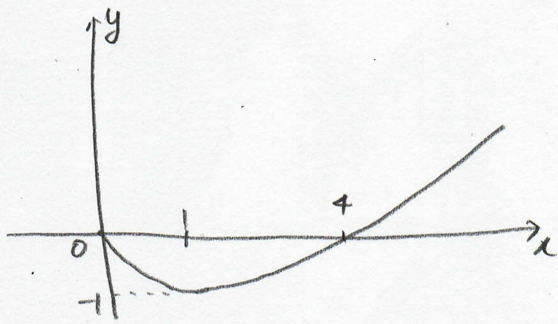
(1) $y = x - 2\sqrt{x}$　　　　(2) $y = e^{-x^2}$

(1) $y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$

x　$x=0, 4$ のとき $y=0$ となる

x	0	…	1	…
y'			0	
y	0	↘	-1	↗

グラフは次のようになる



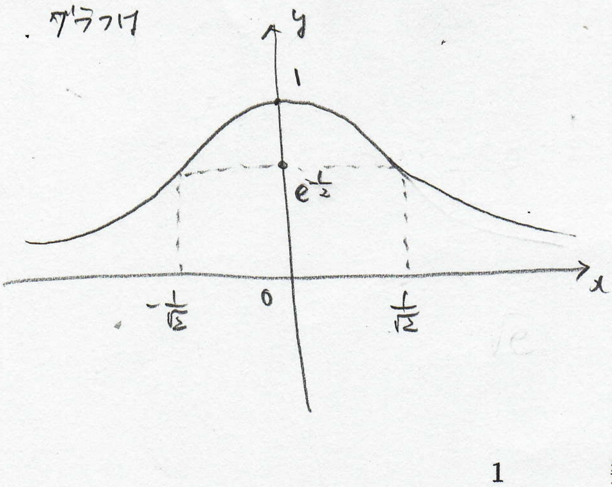
(2) $y' = -2x e^{-x^2}$　$x=0$ で極値

$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$
$= 2e^{-x^2}(2x^2-1)$

x	…	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	…	0	…	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	…
y'	…		$+$	0	$-$		…
y''	$+$	0	$-$	$-$	$+$	0	$+$
y	…	$e^{-\frac{1}{2}}$	↗	1	↘	$e^{-\frac{1}{2}}$	…

変曲点は $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

グラフは



(3) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2+1}$ (4) $y = x + 2\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

〔頻出問題〕

(3)

$$y' = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

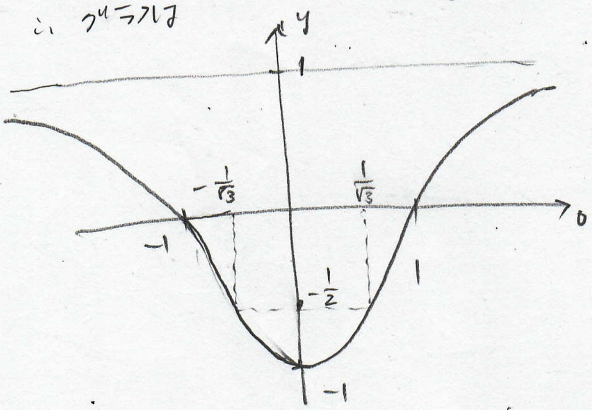
$$y'' = \frac{4(x^2+1)^2 - 4x(4x^3+4x)}{(x^2+1)^4} = \frac{-4(x^2+1)(3x^2-1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'			$-$	0	$+$		
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y		$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	

x軸との交点は
$(-1, 0)$ $(1, 0)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$ $y=1$ が漸近線

∴ グラフは



グラフ1

次の曲線の増減, 凹凸を調べて, そのグラフの概形をかけ。

(4)

(1) $y = x - 2\sqrt{x}$　　(2) $y = e^{-x^2}$

(3) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$　　(4) $y = x + 2\sin x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

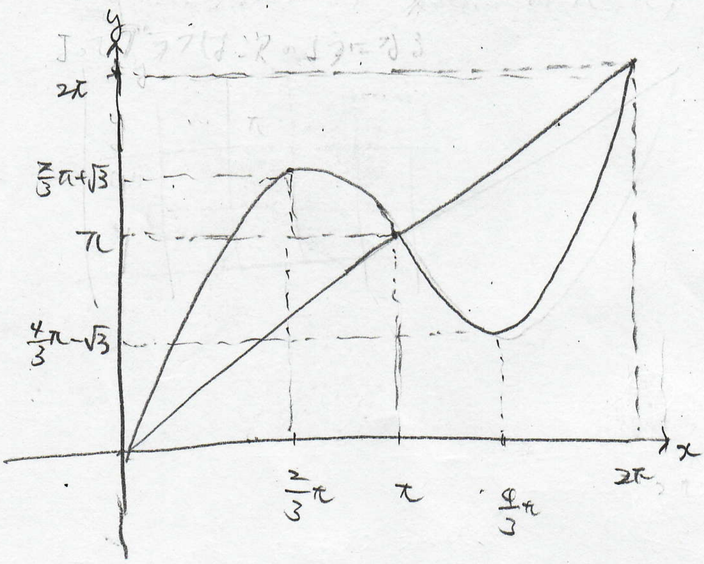
〔頻出問題〕

(4) $y' = 1 + 2\cos x$　　$\cos x = -\frac{1}{2}$ となる x は $x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ で，このとき $y' = 0$ となる

また $y'' = -2\sin x$ より 変曲点は (π, π) である

これをもとに増減表をかくと

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'	3	$\cdots$	0	$\cdots$	$-$	$\cdots$	0	$\cdots$	3
y''	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$	$\searrow$	π	$\searrow$	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$	$\nearrow$	2π



グラフは左図のようになる