

関数 $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$ の増減, 極値を調べ, そのグラフの概形をかけ. また, このグラフに変曲点があればそれも求めよ. [名古屋市大]

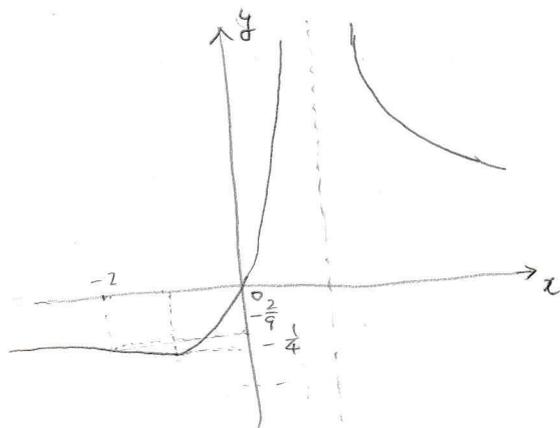
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)^2 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= -\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3} \\ &= -\frac{x+1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-1 \cdot (x-1)^3 + (x+1) \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} \\ &= \frac{(x-1)^2 \{-x+1+3(x+1)\}}{(x-1)^6} \\ &= \frac{2(x+2)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

$x=1$ で漸近線は $y=0, x=1$ である

x	...	-1	...	1	...
$f(x)$	-	0	+	↗	-
$f'(x)$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	↘	↘

x	...	-2	...	1	...
$f''(x)$		0	↘	↗	↘
$f(x)$	↗	$-\frac{2}{9}$	↘	↗	↘



$f(x)$ は $x=-1$ で極値をとる

変曲点は $x=-2$ である.

特に $x > 1$ のとき $f'(x) < 0$ となり

減少関数となる.

増減表は左の通りである.

変曲点の座標は $(-2, -\frac{2}{9})$

である.