30 グラフ14

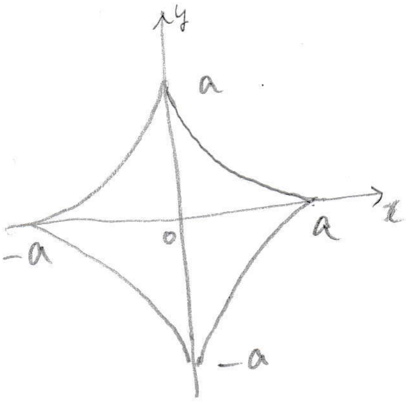
曲線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$ について, 次の問いに答えよ。

(1) この曲線の概形をかけ。

(2) この曲線上の 1 点における接線が x 軸, y 軸によって切り取られる部分の長さは, つねに一定であることを証明せよ。

〔重要例題〕

(1)



式を x で微分すると

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$$

$$y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$ となり $(\because x \neq 0)$

$x>0,\ y>0$ では減少関数

で, 点 $(0, a), (a, 0)$ で接する.

グラフは x 軸, y 軸について対称なので左図のようになる.

(2) グラフ上の点を (x_0, y_0) とすると接線の式は

$$y = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}(x - x_0) + y_0$$

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}x + y = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}x_0 + y_0$$ 両辺 $(y_0)^{\frac{1}{3}}$ でわって

$$\left(\frac{1}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}x + \left(\frac{1}{y_0}\right)^{\frac{1}{3}}y = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}x_0 + y_0\,(y_0)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x_0}} + \frac{y}{\sqrt[3]{y_0}} = x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}$$ ここで $x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ より

接線の式は $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x_0}} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{y_0}} = a^{\frac{2}{3}}$

$x=0$ とすると $y = \sqrt[3]{y_0 a^2}$ $(0, \sqrt[3]{y_0 a^2})$ これを P とする

$y=0$ とすると $x = \sqrt[3]{x_0 a^2}$ $(\sqrt[3]{x_0 a^2}, 0)$ これを Q とする

従って x 軸, y 軸によって切りとられる長さ PQ は

$$PQ = \sqrt{(y_0 a^2)^{\frac{2}{3}} + (x_0 a^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \sqrt{a^{\frac{4}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}} \cdot x_0^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \sqrt{a^{\frac{4}{3}}\left(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}\right)}$$

$$= \sqrt{a^2} = a$$

よって長さは a で一定である.