3Cグラフ15

(1) $x>0$ のとき, $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$ を求めよ。

(3) 関数 $y = xe^{-x}$ の $(-\infty, \infty)$ における増減と凹凸を調べ, そのグラフの概形をかけ。

〔富山大〕

(1) $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} - x - 1$ とおく

$f'(x) = e^x - x - 1$ となり

$f'(x) = 0$ となるのは $x=0$ のときで $x>0$ において $f'(x)$ はつねに正

である ∴ $f(x)$ は $x>0$ において単調増加となる

ゆえに $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つ

(2) (1)より $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{1}{x} + 1 + \dfrac{x}{2} \rightarrow \dfrac{2e^x}{x} > \dfrac{2}{x} + 2 + x$

∴ $\dfrac{2}{x} > \dfrac{2}{x}e^{-x} + 2e^{-x} + xe^{-x}$

つまり $xe^{-x} < \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{e^x}\left(\dfrac{1}{x} + 1\right) < \dfrac{2}{x}$ となる

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$ より

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$

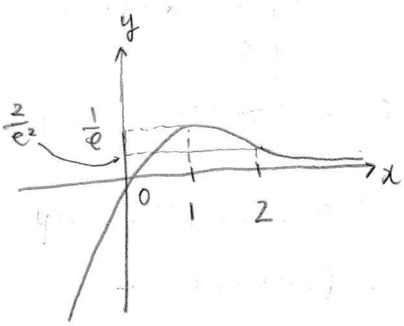
(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$

$y' = -xe^{-x} + e^{-x}$

$y' = e^{-x}(1-x)$ $e^{-x}>0$ より $x=1$ で極値をもつ

$y'' = -e^{-x}(1-x) - e^{-x}$

$= -e^{-x}(2-x)$ 変曲点は $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$



	$-\infty$	…	1	…	2	…	∞
y''		−	−	−	0	+	
y'		+	0	−	−	−	
y	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘	0

極大