方程式 $\dfrac{1}{2}x^2 - \log(1+x^2) = k$ が区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で 2 つの異なる実数解をもつように，k の値の範囲を定めよ。ただし，対数は自然対数である。　〔徳島大〕

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \log(1+x^2)$　$g(x) = k$ とおいて $-1 \leqq x \leqq 1$ で

$f(x)$ と $g(x)$ が異なる2点で交わることを考える.

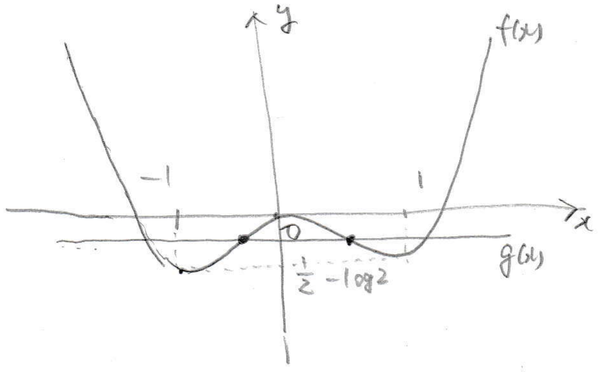
$$f'(x) = x - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x^3 - x}{1+x^2} = \frac{x(x+1)(x-1)}{1+x^2}$$

∴ $x=0, \pm 1$ で $f(x)$ は極値をとる.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$　$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{2}-\log 2$	↗	0	↘	$\frac{1}{2}-\log 2$	↗

グラフをかくと左下図のよう



区間が $-1 \leqq x \leqq 1$ であるから
その区間で $g(x)$ と $f(x)$ が
異なる2点で交わるための k の
範囲は

$\frac{1}{2} - \log 2 \leqq k < 0$