(1) $x>0$ のとき, $2\sqrt{x}>\log x$ であることを示し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=\dfrac{\log x}{x}$ の概形をかけ。

(3) 正の自然数 a に対して, $a^x=x^a$ を満たす実数 x の個数を調べよ。ただし, 対数は自然対数である。

〔鹿児島大〕

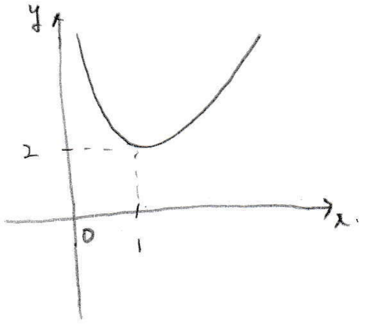
(1)

$f(x)=2\sqrt{x}-\log x$ とする。 $f(x)=2x^{\frac{1}{2}}-\log x$ より

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$ とすると $x=1$ で極値をとる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	
$f(x)$	/	↘	2	↗	∞



$f(x)$ は上の増減表より $x=1$ のとき極小かつ最小値をとり、その値は2である

$\therefore$ $f(x)$ は $x>0$ においてつねに正である。

従って $2\sqrt{x}>\log x$ である …①

①より $\dfrac{2\sqrt{x}}{x}>\dfrac{\log x}{x}$ 　 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}2\sqrt{\frac{1}{x}}=0$.

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$

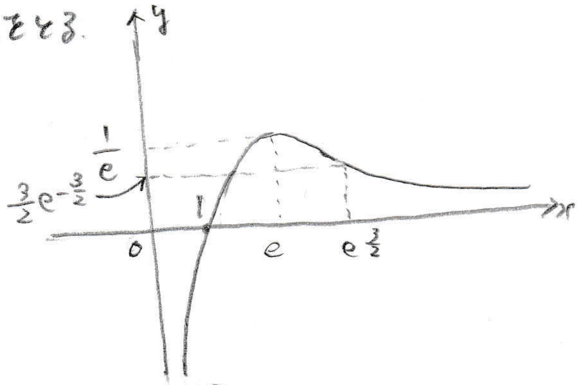
(2)

$g(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと $g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ $(\because x>0)$

$g'(x)=0$ とおくと $x=e$ で極値をとる。

増減表をかくと

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$g'(x)$	/	$+$	0	$-$	
$g(x)$	/	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



$g''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\log x)}{x^4}$

$=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$ 　 $g''(x)=0$ とおくと $x=e^{\frac{3}{2}}$

このとき $g(x)$ の座標は

$\left(e^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ … 変曲点 　 $\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=-\infty$

30 グラフ18 2/2

(3)

$a^x = x^a$ より

$x \log a = a \log x$

$\frac{\log x}{x} = \frac{\log a}{a}$ となり 求める実数 x の個数は

$F(x) = \frac{\log x}{x}$ と $G(a) = \frac{\log a}{a}$ の交点の個数である。($\because a > 0$)

(1)のグラフより $G(a) \leqq \frac{1}{e}$ より

$\frac{\log a}{a} \leqq 0$ のとき つまり $0 < a \leqq 1$ のとき 1個

$0 < \frac{\log a}{a} < \frac{1}{e}$ のとき つまり $1 < a < e$ のとき 2個

$\frac{\log a}{a} = \frac{1}{e}$ のとき つまり $a = e$ のとき 1個

$\frac{\log a}{a} > \frac{1}{e}$ のとき つまり $a > e$ のとき 2個

e を極値として
$\frac{\log a}{a}$ は減少するから交点は2つになる