3Cグラフ 19

関数 $f(x)$ は, 次の等式を満たしているとする。

$$f(x)=1+\int_0^1 xte^{x+t}f(t)\,dt$$

このとき, 次の各問に答えよ。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 te^t\,dt,\ \int_0^1 t^2e^{2t}\,dt$ を, それぞれ求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の増減と極値, 曲線 $y=f(x)$ の凹凸と変曲点を調べ, その概形をえがけ, ただし, $e>2.7$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ であることは用いてよい。

〔宮城教育大〕

(1) $\displaystyle\int_0^1 t(e^t)'dt=\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t dt=\left[te^t\right]_0^1-\left[e^t\right]_0^1$
$=e-(e-1)=1$

$\displaystyle\int_0^1 t^2e^{2t}dt=\int_0^1 t^2\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)'dt=\left[\frac{1}{2}t^2e^{2t}\right]_0^1-\int_0^1 te^{2t}dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}e^2-\int_0^1 t\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)'dt=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{2}e^{2t}dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2+\left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^1=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}$

(2) $\displaystyle f(x)=1+xe^x\int_0^1 te^tf(t)dt$ となり $\displaystyle\int_0^1 te^tf(t)dt=a$ とおくと

$f(x)=1+axe^x$ とおけ

$\displaystyle a=\int_0^1 te^t(1+ate^t)\,dt=\int_0^1 te^tdt+a\int_0^1 t^2e^{2t}dt$ となり (1) より

$\displaystyle=1+a\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$ $\displaystyle a=1+a\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$ より

$\displaystyle a=\frac{4}{5-e^2}$

$\displaystyle\therefore f(x)=1+\frac{4}{5-e^2}xe^x$

(3) $\displaystyle f'(x)=\frac{4}{5-e^2}e^x+\frac{4}{5-e^2}xe^x$

$\displaystyle=\frac{4}{5-e^2}e^x(1+x)$

$\displaystyle f''(x)=\frac{4}{5-e^2}e^x(1+x)+\frac{4}{5-e^2}e^x$

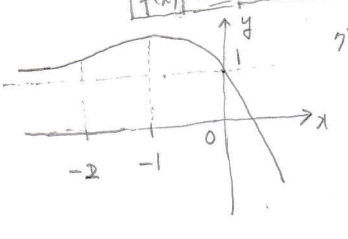
$\displaystyle=\frac{4}{5-e^2}e^x(2+x)$

$f'(x)=0$ より $x=-1$ で極大値 $\displaystyle 1-\frac{4}{e(5-e^2)}$

変曲点は $\displaystyle\left(-2,\ 1-\frac{8}{e^2(5-e^2)}\right)$

増減表, 凹凸は

x	…	-2	…	-1	…
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↗	変曲点	↗	極大	↘



グラフの概形は左図