$(x-x^2)e^{-x}$

関数 $f(x)=x(1-x)e^{-x}$ に対して，$y=f(x)$ の表す曲線を C とする。次の問いに答えよ。

(1) C の概形を描け。C の凹凸も調べること。ただし，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を証明なしに用いてもよい。

(2) 原点 (0, 0) を通り，原点以外の点で C に接する直線を l とする。C と l で囲まれる図形の面積を求めよ。

〔横浜国立大〕

$f'(x)=(1-2x)e^{-x}-x(1-x)e^{-x}$

$=(x^2-3x+1)e^{-x}$ …①　$f'(x)=0$ とすると $x=\dfrac{3\pm\sqrt5}{2}$

$f''(x)=(2x-3)e^{-x}-(x^2-3x+1)e^{-x}$

$=-(x^2-5x+4)e^{-x}$

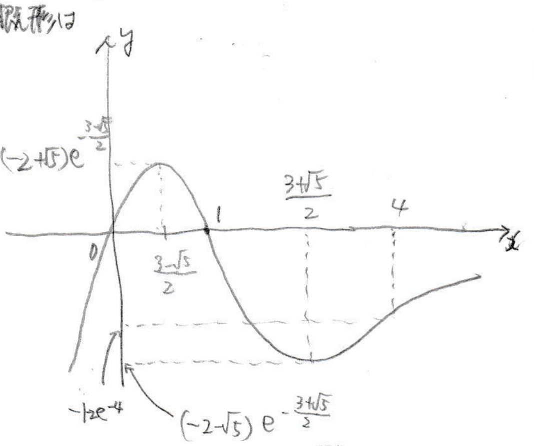
$=-(x-1)(x-4)e^{-x}$ …②

x	…	$\frac{3-\sqrt5}{2}$	…	1	…	$\frac{3+\sqrt5}{2}$	…	4	…
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+	0	−
$f(x)$	↗		↘		↘		↗		↗

$f\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)=(-2+\sqrt5)e^{-\frac{3-\sqrt5}{2}}$　$f\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)=(-2-\sqrt5)e^{-\frac{3+\sqrt5}{2}}$

$f(1)=0$，$f(4)=-12e^{-4}$

グラフの概形は右下図



曲線C上の点を $(t,\ t(1-t)e^{-t})$ として接線をもとめると

$y=(t^2-3t+1)e^{-t}(x-t)+t(1-t)e^{-t}$ これが原点を通るので

(0.0) を代入すると

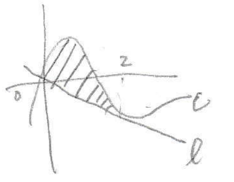
$(-t^3+3t^2-t+t-t^2)e^{-t}=0$　$e^{-t}>0$ で ( ) の中を整理すると

$t^3-2t^2=0$　$t^2(t-2)=0$ となり $t\neq0$ であるから

$t=2$

よって接線の式は $y=-e^{-2}x$

よって求める面積を S とすると



$S=\int_0^2 (x(1-x)e^{-x}+e^{-2}x)\,dx$ …①

①より $\int_0^2 (x-x^2)e^{-x}\,dx$

$=\left[-(x-x^2)e^{-x}\right]_0^2+\int_0^2(1-2x)e^{-x}\,dx$

$=2e^{-2}+\left[-(1-2x)e^{-x}\right]_0^2-\int_0^2 2e^{-x}\,dx$

$=2e^{-2}+3e^{-2}+1-\left[-2e^{-x}\right]_0^2$

$=5e^{-2}+1+2e^{-2}-2=7e^{-2}-1$ …②

また $\int_0^2 e^{-2}x\,dx=\left[\frac12 e^{-2}x^2\right]_0^2=2e^{-2}$ …③

②,③より $S=7e^{-2}-1+2e^{-2}$

$\therefore\ S=9e^{-2}-1$