関数 $f(x) = x^2e^{-x}$ に対し, 次の問に答えよ。なお必要ならば, $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を利用してよい。

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減, 極値, 凹凸を調べ, グラフの概形をかけ。

(2) y 軸上の点 $\mathrm{P}(0, a)$ から曲線 $y = f(x)$ にひける接線の本数を a の値に応じて調べよ。

〔北里大〕

(1)

$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = -x(x-2)e^{-x}$

$f''(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x}$

$= (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

$f'(x) = 0$ のとき $x = 0, 2$.　$f''(x) = 0$ のとき $x = 2 \pm \sqrt{2}$

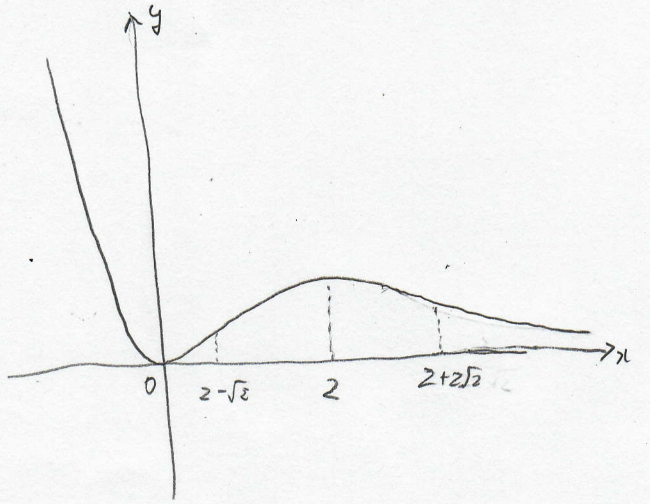
増減表をかくと

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗		↗	$\frac{4}{e^2}$	↘		↗

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

よってグラフの概形は



(2)

$f'(x) = (-x^2+2x)e^{-x}$ より $f(x)$ における接点を (t, t^2e^{-t}) とすると

接線の式は

$$y = (-t^2+2t)e^{-t}(x-t) + t^2e^{-t}$$

これが $P(0, a)$ を通ることより

$$a = -t(-t^2+2t)e^{-t} + t^2e^{-t}$$

$$a = (t^3-t^2)e^{-t}$$

左辺を $P(t)$，右辺を $Q(t)$ としてそれぞれ t の関数とする

$P(t) = a$

$Q(t) = (t^3-t^2)e^{-t}$

$Q'(t) = (3t^2-2t)e^{-t} - (t^3-t^2)e^{-t} = (-t^3+4t^2-2t)e^{-t}$

$= -t(t^2-4t+2)e^{-t}$

$Q'(t) = 0$ とおくと　$t = 0,\ 2\pm\sqrt{2}$

ここで

$t^3-t^2 = t^2(t-1) = (6\pm4\sqrt{2})(1\pm\sqrt{2}) = 14\pm10\sqrt{2}$

∴

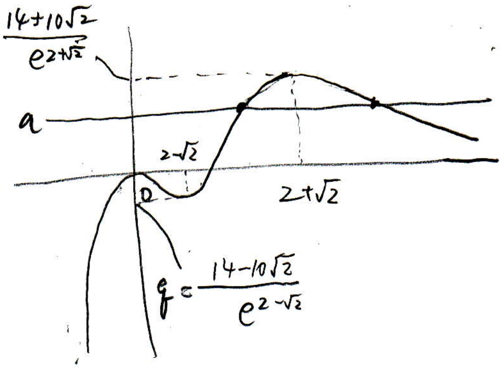
$Q(0) = 0$　$Q(2\pm\sqrt{2}) = 14\pm10\sqrt{2}\,e^{-(2\pm\sqrt{2})}$　(複号同順)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↘	$\frac{14-10\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$	↗	$\frac{14+10\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$	↘

$\lim_{t\to-\infty} Q(t) = -\infty$

$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 0$

$p = \frac{14+10\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$



$q = \frac{14-10\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$

$\frac{14\pm10\sqrt{2}}{e^{2\pm\sqrt{2}}}$ の大きい方を p，小さい方を q とすると接線の本数は左図より

(答)
$$\begin{cases} p > a \cdots 0\text{本} \\ p = a \cdots 1\text{本} \\ 0 \leq a < p \cdots 2\text{本} \\ q < a < 0 \cdots 3\text{本} \\ a = q \cdots 2\text{本} \\ a < q \cdots 1\text{本} \end{cases}$$