

3C極値21

3C極値21

x の関数 $f(x) = x^3 + 2ax + \frac{b}{x}$ が、 $x > 0$ で極大値と極小値をそれぞれ1つずつもつための a, b の条件を求めよ。 [北海道大]

$$f'(x) = 3x^2 + 2a - \frac{b}{x^2} = \frac{3x^4 + 2ax^2 - b}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$f'(x)$ が $x > 0$ において異なる2の実数解をもてほしい。 \rightarrow 3

$3x^4 + 2ax^2 - b = 0$ が $x > 0$ で2つの異なる実数解をもてほしい

\rightarrow $x^2 = t$ ($t > 0$) とおくと

$3t^2 + 2at - b = 0$ が2つの正の解を持つことから

$$a^2 + 3b > 0 \quad \dots ①$$

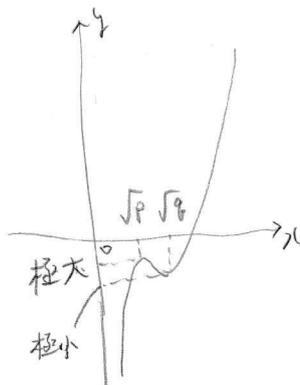
解を p, q ($p < q$) とすると解と係数の関係より、

$$p + q = -\frac{2a}{3} > 0 \quad pq = -3b > 0 \quad \dots ②$$

$$③ \text{ かつ } a < 0, b < 0 \quad \dots ③$$

このとき $3x^2 + 2ax - b = 0$ は正の解 p, q を持つ ($p < q$)

$x = \sqrt{p}$ のとき極大値 $x = \sqrt{q}$ のとき極小値をとる



$$\therefore \left(\frac{a}{b} \right) \begin{cases} a^2 + 3b > 0 \\ a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$$