関数 $f(x) = \dfrac{a}{x^2} - \dfrac{k}{x-2}$ において, k の値を正に定めたとき, $x>2$ において $f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ。 〔慶応大〕

$$f'(x) = \frac{-2a}{x^3} - \frac{-k}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-2a(x-2)^2 + kx^3}{x^3(x-2)^2} \qquad x \neq 0,\ x \neq 2$$

ここで $f'(x)$ が $x>2$ で異なる実数解を2つもてばよい

つまり $f'(x)$ の分子

$kx^3 - 2a(x-2)^2 = 0$ …① としたとき、この方程式が $x>2$ で極値をとることを考える（∵ $k>0$）

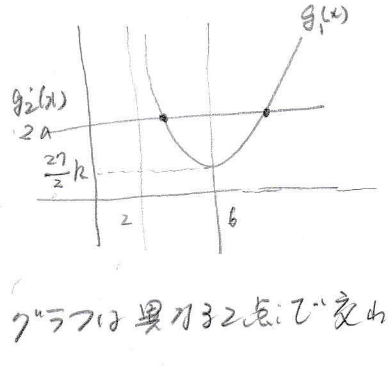
$$kx^3 = 2a(x-2)^2$$

$\dfrac{kx^3}{(x-2)^2} = 2a$ として $g_1(x) = \dfrac{kx^3}{(x-2)^2}$, $g_2(x) = 2a$ が $x>2$ で異なる2点で交わればよい

$$g_1'(x) = \frac{3kx^2(x-2)^2 - kx^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3kx^2(x-2) - 2kx^3}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{kx^2(x-6)}{(x-2)^3} \qquad x \neq 2,\ k>0$$

x	2	…	6	…
$g'(x)$	/	$-$	0	$+$
$g(x)$	/	↘	$\frac{27}{2}k$	↗



∴ $2a > \dfrac{27}{2}k$ であればグラフは異なる2点で交わる

ゆえに $a > \dfrac{27}{4}k$