3C 極値 24

a は定数, e は自然対数の底とする。$0 < x < 2\pi$ を定義域とする関数 $f(x) = ax + e^{-x}\sin x$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $g(x) = f'(x)$ の極値, およびそのときの x の値を求めよ。

(2) $f(x)$ が極大値, 極小値をちょうど 1 個ずつもつとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

〔東京商船大〕

(1)

$f'(x) = a - e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$

$g(x) = a - e^{-x}(\sin x - \cos x)$

$g'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x) + e^{-x}(\sin x - \cos x)$

$= -2e^{-x}\cos x$

$g'(x) = 0$ とすると $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ で極値をとる

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

∴ 極小値 $x = \frac{\pi}{2}$ のとき $a - e^{-\frac{\pi}{2}}$

極大値 $x = \frac{3}{2}\pi$ のとき $a + e^{-\frac{3}{2}\pi}$

(2)

$0 < x < 2\pi$ で $f(x)$ が 2 つの極値をもつことは

$g(x)$ が 2 つの異なる実数解をもてばよい, つまり $g(x)$ が x 軸と

2 回交わればよい

ここで $g(0) = a + 1$ $g(2\pi) = a + e^{-2\pi}$

$g(\frac{\pi}{2}) = a - e^{-\frac{\pi}{2}}$, $g(\frac{3}{2}\pi) = a + e^{-\frac{3}{2}\pi}$ より

$g(\frac{\pi}{2}) < g(2\pi) < g(\frac{3}{2}\pi) < g(0)$ このとき

極小値 極大値 $g(\frac{\pi}{2}) < 0$, $g(2\pi) \geqq 0$ であれば

よいので

$a - e^{-\frac{\pi}{2}} < 0$ $a + e^{-2\pi} \geqq 0$

$a < e^{-\frac{\pi}{2}}$ $a \geqq -e^{-2\pi}$

以上より

$-e^{-2\pi} \leqq a < e^{-\frac{\pi}{2}}$