関数 $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$ について，

(1) $f(x)$ の極値およびその極値を与える x の値を求めよ。

(2) 実数 a に対して，$f(x) = a$ を満たす x は 0 と 2π との間に何個あるか。

〔神戸大〕

(1)

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{3\sqrt3\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad (\because x \neq \frac{\pi}{2}+2n\pi,\ \pi+2n\pi)$$

$(\sqrt3)^3 \longrightarrow$

$$= \frac{3\sqrt3\sin^3 x - \cos^3 x}{3\sqrt3\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{(\sqrt3\sin x)^3 - \cos^3 x}{3\sqrt3\sin^2 x\cos^2 x}$$

27

$$= \frac{(\sqrt3\sin x - \cos x)(3\sin^2 x + \sqrt3\sin x\cos x + \cos^2 x)}{3\sqrt3\sin^2 x\cos^2 x}$$

$f'(x)=0$ より $\sqrt3\sin x - \cos x = 0$ $\quad \sqrt3\sin x = \cos x$ $\quad \tan x = \frac{1}{\sqrt3}$

$\therefore x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \cdots ①$ $\quad \frac{7}{6}\pi + 2n\pi \cdots ②$ (nは任意の整数)

①のとき

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\quad \cos x = \frac{\sqrt3}{2}$ $\quad \therefore f(x) = \frac{2}{3\sqrt3} + \frac{2}{\sqrt3} = \frac{8}{3\sqrt3} = \frac{8}{9}\sqrt3$

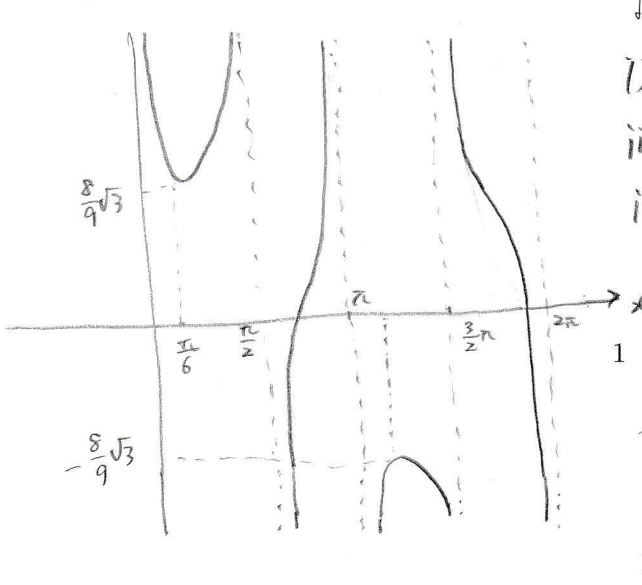
②のとき

$\sin x = -\frac{1}{2}$ $\quad \cos x = -\frac{\sqrt3}{2}$ $\quad \therefore f(x) = -\frac{2}{3\sqrt3} - \frac{2}{\sqrt3} = -\frac{8}{3\sqrt3} = -\frac{8}{9}\sqrt3$

(2) $0<x<2\pi$ より増減表をかくと

x	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π	…	$\frac{7}{6}\pi$	…	$\frac{3}{2}\pi$	…	2π
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	/	$+$	/	$+$	0	$-$	/	$-$	/
$f(x)$	/	↘	極小	↗	/	↗	/	↗	極大	↘	/	↘	/

グラフをかくと下図のようになる



よって$f(x)$とaの交点は

i) $a > \frac{8}{9}\sqrt3$ $\quad a < -\frac{8}{9}\sqrt3$ のとき4個

ii) $a = \pm\frac{8}{9}\sqrt3$ のとき 3個

iii) $-\frac{8}{9}\sqrt3 < a < \frac{8}{9}\sqrt3$ のとき 2個.