3C 極値 4

関数 $y=e^{2x}+ae^{x}+2x$ の極大値と極小値の和が -11 となるように定数 a の値を求めよ。
〔群馬大〕

$y'=2e^{2x}+ae^{x}+2$ となり $e^{x}=t$ とおくと

$y'=2t^2+at+2$ $(t>0)$

極大・極小値をとることから 判別式 $D>0$.

$a^2-16>0$ $a<-4$, $a>4$ …①

2つの実数解 α, β は、ともに正であるから

$\alpha+\beta=-\frac{a}{2}$ $\alpha\beta=1$ ともに正である. ∴ $a<0$ …②

①②より $a<-4$ …(a)

また $\alpha=e^{p}$, $\beta=e^{q}$ とすると

$e^{p}+e^{q}=-\frac{a}{2}$ $e^{p}\cdot e^{q}=1 \to p+q=0$.

題意より

$e^{2p}+ae^{p}+2p+e^{2q}+ae^{q}+2q=-11$

$(e^{p}+e^{q})^2-2e^{p+q}+a(e^{p}+e^{q})+2(p+q)=-11$

$\left(-\frac{a}{2}\right)^2-2+a\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+2\cdot 0=-11$

$\frac{a^2}{4}-2-\frac{a^2}{2}=-11$

$-\frac{a^2}{4}=-9$

$a^2=36$

$a=\pm 6$

条件(a)より $a=-6$

よく似た
次頁に別解あり.

関数 $y=e^{2x}+ae^{x}+2x$ の極大値と極小値の和が -11 となるように定数 a の値を求めよ。 〔群馬大〕

$e^x=t$ とおくと, $t>0$ $\log e^x=\log t$ より $x=\log t$

これから

$y=t^2+at+2\log t$ とおける.

$y'=2t+a+\dfrac{2}{t}$

$=\dfrac{2t^2+at+2}{t}$ …① 極値を2つもつことから

$a^2-16>0$. $a>4$, $a<-4$ …②

このとき極値をとる t の値を①の分子の t の2次方程式の解とし

それを $t=\alpha,\beta$ とする α で極大値をとり β で極小値をとるとすると

(極大値)+(極小値)

$=\alpha^2+a\alpha+2\log\alpha+\beta^2+a\beta+2\log\beta$

$=\alpha^2+\beta^2+a(\alpha+\beta)+2\log\alpha\beta$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+a(\alpha+\beta)+2\log\alpha\beta$ …③

ここで解と係数の関係より ①の分子の2次方程式から

$\alpha+\beta=-\dfrac{a}{2}$, $\alpha\beta=1$ …④となり, $\alpha>0,\beta>0$ なので $\alpha+\beta>0$ より $-\dfrac{a}{2}>0$

であるから $a<0$ …⑤となる. ④を③に代入すると

$\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2-2\cdot1+a\left(-\dfrac{a}{2}\right)-2\log1$

$=\dfrac{a^2}{4}-2-\dfrac{a^2}{2}$

$=-\dfrac{a^2}{4}-2$ これが -11 になるので

$-\dfrac{a^2}{4}-2=-11$ $a^2=36$

$a=\pm6$ ②⑤より $a<-4$ なので

$a=-6$