aを正の定数とするとき, xの関数

$$f(x)=\frac{-ax+a^2+1}{x^2-4}$$

の極小値と, そのときのxの値を求めよ。 〔浜松医大〕

$$f'(x)=\frac{-a(x^2-4)-2x(-ax+a^2+1)}{(x^2-4)^2}$$

$$=\frac{-ax^2+4a+2ax^2-2a^2x-2x}{(x^2-4)^2}$$

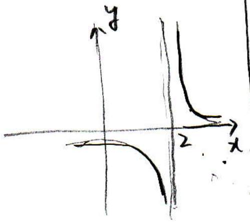
$$=\frac{ax^2-2(a^2+1)x+4a}{(x^2-4)^2}=\frac{(x-2a)(ax-2)}{(x^2-4)^2}$$

$x=2a,\ \frac{2}{a}$ で極値をとる $a>0$ であるから

$0<a<1$ $a>1$ $a=1$ で場合分けを行う

また極値をもつときの2つのxをα, β $(\alpha<\beta)$とするとき $\alpha=\beta$ すなわち

$\frac{2}{a}=2a$ となる $a=1$ では $f(x)=\frac{-x+2}{(x-2)(x+2)}=-\frac{1}{x+2}$ となり極値はない。



x	…	α	…	2	…	β	…
$f'(x)$	+	0	−	/	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	/	↘	極小	↗

$0<a<1$ のとき

$2a<\frac{2}{a}$ であるから $x=\frac{2}{a}$ で極小値をとる

$$\therefore f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{-2+a^2+1}{\frac{4}{a^2}-4}=\frac{(a^2-1)a^2}{-4(a^2-1)}=-\frac{a^2}{4}$$

$a>1$ のとき $2a>\frac{2}{a}$ であるから $x=2a$ で極小値

$$f(2a)=\frac{-2a^2+a^2+1}{4a^2-4}=\frac{-a^2+1}{4(a^2-1)}=-\frac{1}{4}$$

以上より

$0<a<1$ のとき 極小値 $-\frac{a^2}{4}$ $\left(x=\frac{a}{2}\right)$

$a>1$ のとき 極小値 $-\frac{1}{4}$ $(x=2a)$

$a=1$ のとき 極値はない