



3c 極値 6



関数 $f(x) = (x^2 + ax + a)e^{-x}$ ($a \leq 2$) は、極値をもつものとする。このとき、次の問いに答えよ。

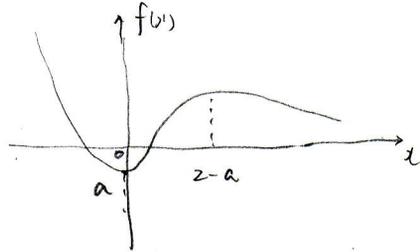
- (1) 極小値が 0 となるように、 a の値を定めよ。
- (2) 極大値と 2 との大小を調べよ。

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad f'(x) &= (2x+a)e^{-x} - (x^2+ax+a)e^{-x} \\ &= \{-x^2 + (2-a)x\}e^{-x} = -x\{x - (2-a)\}e^{-x} \end{aligned}$$

(i) $a=2$ のとき $f'(x) = -x^2 e^{-x} \leq 0$ とおり 極値はない。

(ii) $a < 2$ のとき

x	...	0	...	$2-a$...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘



$\therefore x=0$ が極小値 $f(0) = a = 0$

$\therefore a = 0$

(2) $a < 2$ のとき $f(x)$ は極大値 $f(2-a)$ となる。

$$\begin{aligned} f(2-a) &= \{(2-a)^2 + a(2-a) + a\}e^{-(2-a)} \\ &= (4 - 4a + a^2 + 2a - a^2 + a)e^{-(2-a)} \\ &= (-a + 4)e^{-(2-a)} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ において $g(a) = (-a + 4)e^{a-2}$ とおくと

$g'(a) = (-a + 3)e^{a-2} \geq 0$ とおくと $g(a)$ は増加関数

$g(2) = 2$ より $a < 2$ のとき $g(a) < 2$

\therefore 極大値は 2 より小さい

