3C 極値7

a, b, c は定数で，$b > 0, c > 1$ とする。$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = ax^2 - bx + 2\log x$ が，$x = \dfrac{1}{c}$ と $x = c$ で極値をとり，これらの極値の和が $-\dfrac{33}{4}$ であるとき，a, b, c の値を求めよ。 〔群馬大〕

$f'(x) = 2ax - b + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2ax^2 - bx + 2}{x}$ となり分子の二次式を

$2ax^2 - bx + 2 = 0$ とおくと $x = \dfrac{1}{c}, c$ を解にもつことから

$\dfrac{1}{c} + c = \dfrac{b}{2a}$ $\quad \dfrac{1}{c} \cdot c = \dfrac{2}{2a}$ $\quad \therefore \underline{a = 1}$, $c + \dfrac{1}{c} = \dfrac{b}{2}$

$f\left(\dfrac{1}{c}\right) = \dfrac{1}{c^2} - \dfrac{b}{c} - 2\log c$ …①

$f(c) = c^2 - bc + 2\log c$ …②

① + ② $= -\dfrac{33}{4}$ より

$$\frac{1}{c^2} - \frac{b}{c} + c^2 - bc = -\frac{33}{4}$$

$$c^2 + \frac{1}{c^2} - b\left(c + \frac{1}{c}\right) = -\frac{33}{4}$$

$$\left(c + \frac{1}{c}\right)^2 - 2 - b\left(c + \frac{1}{c}\right) = -\frac{33}{4} \quad c + \frac{1}{c} = \frac{b}{2} \text{ より}$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2 - b \cdot \frac{b}{2} = -\frac{33}{4}$$

$$\frac{b^2}{4} - 2 - \frac{b^2}{2} = -\frac{33}{4}$$

$$b^2 - 8 - 2b^2 = -33$$

$$b^2 = 25$$

$b = \pm 5$ $\quad b > 0$ より $\underline{b = 5}$

$$c + \frac{1}{c} = \frac{5}{2}$$

$$c^2 + 1 = \frac{5}{2}c$$

$$2c^2 - 5c + 2 = 0$$

$(2c - 1)(c - 2) = 0$ $\quad c = \dfrac{1}{2}, 2$ $\quad c > 1$ より $\underline{c = 2}$

以上より $a = 1,\ b = 5,\ c = 2$