

30分以内

$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = x^2 - 5x + 2\log x$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) $x > 3$ における $y = f(x)$ の逆関数を $y = g(x)$ とおくと、 $g(a) = 6$ を満たす a および $g'(a)$ の値を求めよ。

h) $x > 0$ [群馬大]

$$f'(x) = 2x - 5 + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x} = \frac{(x-2)(2x-1)}{x}$$

$x=2, \frac{1}{2}$ の極値と、増減表をかき、以下に示す

x	0	...	$\frac{1}{2}$...	2	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗

$x = \frac{1}{2}$ のとき極大値

$$-\frac{9}{4} - 2\log 2$$

$x = 2$ のとき極小値

$$-6 + 2\log 2$$

(2) $g(a) = 6$ とは $a = f(6)$ である

逆関数の値を考えると

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} & x &= \frac{1}{y} & \left(\frac{1}{a} = 6 \right) \\ f(b) &= a & g(a) &= b \end{aligned}$$

$$a = 6 + 2\log 6$$

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{1}{f'(b)} = \frac{1}{2 \cdot 6 - 5 + \frac{2}{6}} \\ &= \frac{6}{72 - 30 + 2} \\ &= \frac{6}{44} \\ &= \frac{3}{22} \text{ (答)} \end{aligned}$$