3C 極値 9

関数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ について，次の各問いに答えよ。

(1) 極限値 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ および $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の増減と極値を調べ，曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ。

(3) $a>0$ とする。曲線 $y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq a$ の部分と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

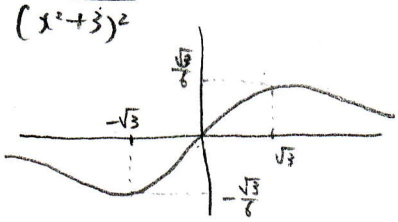
(4) 自然数 n に対して，$S(a)=\dfrac{1}{n}$ となる $a>0$ を a_n とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n$ の値を求めよ。ただし，必要ならば $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ が成り立つことを証明なしで用いてよい。

〔山形大〕

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ ・ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

(2) $f'(x)=\dfrac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2}=\dfrac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$ ∴ $x=\pm\sqrt{3}$ で極値をとる

x	…	$-\sqrt{3}$	…	$\sqrt{3}$	…
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	↘



グラフは原点対称である

(3) 求める面積は

$$S(a)=\int_0^a \frac{x}{x^2+3}\,dx=\left[\frac{1}{2}\log(x^2+3)\right]_0^a=\frac{1}{2}\log(a^2+3)-\frac{1}{2}\log 3$$
$$=\underline{\frac{1}{2}\log\left(\frac{a^2+3}{3}\right)}$$

(4) $S(a)=\frac{1}{n}$ より $\frac{1}{2}\log\left(\frac{a^2+3}{3}\right)=\frac{1}{n}$ つまり $\log\left(\frac{a^2+3}{3}\right)=\frac{2}{n}$ ∴ $\frac{a^2+3}{3}=e^{\frac{2}{n}}$

$a^2+3=3e^{\frac{2}{n}}$ $a^2=3e^{\frac{2}{n}}-3$ つまり $a_n=\sqrt{3e^{\frac{2}{n}}-3}$ $(a>0)$

これより

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3ne^{\frac{2}{n}}-3n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3n\cdot\frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{2}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{6\cdot\frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{6}\sqrt{\frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{n}}$$

$\underline{\sqrt{6}}$