3Cmaxmin1

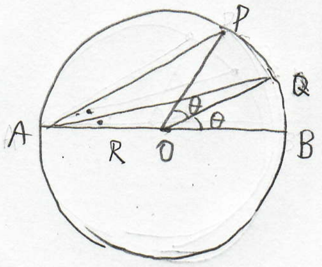
半径 R の円の 1 つの直径を AB, 円周上の 1 点を P, ∠PAB の 2 等分線と円周との交点を Q, ∠PAB $= \theta$ とする。

(1) 線分 AP, AQ および弧 PQ によって囲まれた面積 S を θ の式で表せ。

(2) S を最大にする θ の値に対して $\cos\theta$ を求めよ。

〔青山学院大〕

(1)



中心Oとして

$S = \triangle AOP +$ おうぎ形OPB $- \triangle AOQ -$ おうぎ形OBQ

$= R \times R\sin 2\theta \times \frac{1}{2} + \pi R^2 \times \frac{2\theta}{2\pi}$

$- R \times R\sin\theta \times \frac{1}{2} - \pi R^2 \times \frac{\theta}{2\pi}$

$= \frac{1}{2}R^2\sin 2\theta + R^2\theta - \frac{1}{2}R^2\sin\theta - \frac{R^2\theta}{2}$

∴ $S = \frac{1}{2}R^2(\sin 2\theta - \sin\theta + \theta)$ //

(2) Rは定数より

$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin\theta + \theta$ の最大値を調べればよい

$f'(\theta) = 2\cos 2\theta - \cos\theta + 1$

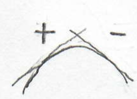
$= 2(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta + 1$

$= 4\cos^2\theta - \cos\theta - 1$

$\cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$ 　　$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$\cos\theta > 0$ 　　∴ $\cos\theta = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$ …… ①

接線の傾き



∴ $f'(\theta)$ はこの前後で正から負にかわるので $f(\theta)$ は ① の値のとき最大値をとることになる 従って その θ に対する $\cos\theta$ の値は ① そのものである

従って $\cos\theta = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$