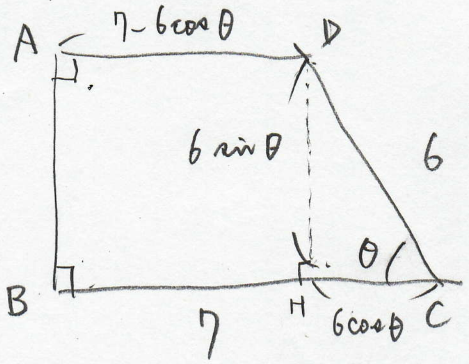
$\angle A = \angle B = \frac{\pi}{2}$, BC=7, CD=6 であるような台形 ABCD の面積の最大値を求めよ。

〔工学院大〕



$0<\theta<\pi$ として 台形の面積を求める事を考える

左図より点Dから辺BCにおろした垂線の足とBCの交点をHとすると

$HC=6\cos\theta$, $DH=6\sin\theta$

$AD=7-6\cos\theta$ となり

台形ABCDの面積Sは

$$S=\{(7-6\cos\theta)+7\}\cdot 6\sin\theta\cdot\frac{1}{2}$$
$$=(14-6\cos\theta)\cdot 3\sin\theta$$
$$=42\sin\theta-18\sin\theta\cos\theta=42\sin\theta-9\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$
$$=42\sin\theta-9\sin 2\theta$$

$$S'=42\cos\theta-18\cos 2\theta$$
$$=42\cos\theta-18(2\cos^2\theta-1)$$
$$=42\cos\theta-36\cos^2\theta+18$$
$$=-6(6\cos^2\theta-7\cos\theta-3)$$
$$=-6(3\cos\theta+1)(2\cos\theta-3)$$

ちなみに増減表は

θ	0	…	α	…	π
S'		+	0	−	
S		↗		↘	

$\therefore \cos\theta=-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$　$0<\theta<\pi$,

$-1<\cos\theta<1$ であるから $\cos\theta=-\frac{1}{3}$ のとき

極値をとる この角を $\theta=\alpha$ とすると

$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ のとき

$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ 求める面積Sは $42\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}-9\cdot 2\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=28\sqrt{2}+4\sqrt{2}=\underline{32\sqrt{2}}$