



曲線  $C: x^2 - y^2 = 1 (x \geq 1)$  と点  $P(4, 0)$  がある。

- (1) 曲線  $C$  の接線と点  $P$  との距離を  $d$  とするとき、 $d$  のとりうる値の範囲を求めよ。  
 (2) 曲線  $C$  の接線のうちで、点  $P$  からの距離が最小となるものの方程式を求めよ。

[信州大]

1) 接点  $E(x, y)$  とすると接線の式は

$$5x - ty = 1 \quad 5x - ty - 1 = 0 \text{ と } t$$

$$d = \frac{|4s - 1|}{\sqrt{s^2 + t^2}} \quad \text{for } s^2 - t^2 = 1 \quad \text{for } t^2 = s^2 - 1 \text{ と } s \geq 1$$

$$d = \frac{|4s - 1|}{\sqrt{2s^2 - 1}} \quad d^2 = \frac{(4s - 1)^2}{2s^2 - 1}$$

$$d^2 = L(s) = \frac{(4s - 1)^2}{2s^2 - 1} \quad \text{or } L'(s) = \frac{8(4s + 1)(2s^2 - 1) - 4s(4s - 1)^2}{(2s^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{(4s - 1)(16s^2 - 8 - 16s^2 + 4s)}{(2s^2 - 1)^2}$$

$$L'(s) = \frac{4(4s - 1)(s - 2)}{(2s^2 - 1)^2}$$

$s$	1	2	...
$L'(s)$	-	0	+
$L(s)$	9	7	...

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(4 - \frac{1}{s})^2}{2 - \frac{1}{s}} = \frac{16}{2} = 8 \quad \text{or } 8 \leq d^2 \leq 9$$

$$\sqrt{8} \leq d \leq 3$$

(2)  $d$  の最小のとき  $d = \sqrt{7}$  のとき  $s = 2$ ,  $s^2 - t^2 = 1$  for  $t = \pm\sqrt{3}$

併せて接線の式は

$$2x \pm \sqrt{3}y = 1$$

