3C max min 12

すべての実数 x について $f(x)=\int_0^1 e^{|t-x|}\,dt$ とおくとき，次の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

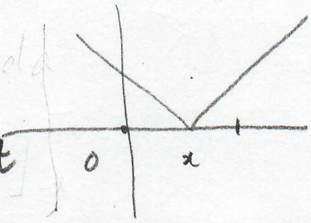
(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を求めよ。

〔宮崎大〕

$x \leqq 0$ のとき

$$f(x)=\int_0^1 e^{t-x}dt=\left[e^{t-x}\right]_0^1=e^{1-x}-e^{-x}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき



$$f(x)=\int_0^x e^{-t+x}dt+\int_x^1 e^{t-x}dt$$

$$=\left[-e^{-t+x}\right]_0^x+\left[e^{t-x}\right]_x^1$$

$$=-1+e^x+e^{1-x}-1=e^x+e^{1-x}-2$$

$x \geqq 1$ のとき

$$f(x)\int_0^1 e^{-t+x}dt=\left[-e^{-t+x}\right]_0^1=-e^{-1+x}+e^x$$

以上より

$$\begin{cases} f(x)=e^{1-x}-e^{-x} & (x \leqq 0) \cdots ① \\ f(x)=e^x+e^{1-x}-2 & (0 \leqq x \leqq 1) \cdots ② \\ f(x)=e^x-e^{-1+x} & (x \geqq 1) \cdots ③ \end{cases}$$

①より $f'(x)=-e^{1-x}+e^{-x}=e^{-x}(1-e)=\dfrac{1-e}{e^x}<0$ 減少関数

②より $f'(x)=e^x-e^{1-x}=e^{-x}(e^{2x}-e)=\dfrac{e^{2x}-e}{e^x}$ $f'(x)=0$ とすると $x=\frac{1}{2}$ のとき
極値をもつ

③より $f'(x)=e^x-e^{-1+x}=e^x(1-e^{-1})>0$ より増加関数 よって増減表をかくと

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$e-1$	↘	$2\sqrt{e}-2$	↗	$e-1$

よって $x=\frac{1}{2}$ のとき 最小値 $2\sqrt{e}-2$ をとる