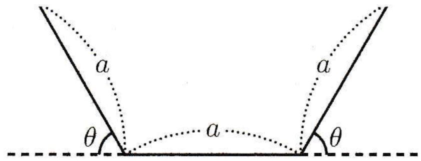
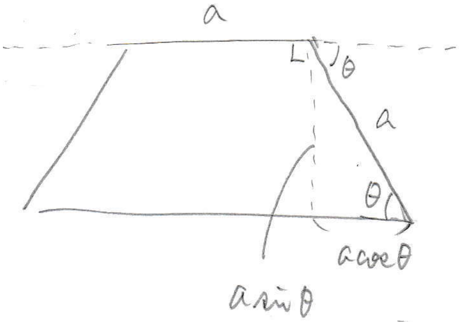
3Cmm15

幅 $3a$ の長方形をしたブリキ板がある。この両端から a のところで等角に曲げてといを作り，流れる水量が最大なものを作りたい。折り曲げる角をいくらにすればよいか。



流れる水が最大→といの断面積が最大



左図より断面積を $f(\theta)$ とすると

$$f(\theta) = \{a + (a + 2a\cos\theta)\} \cdot a\sin\theta \times \frac{1}{2}$$

より

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{1}{2}$

$f(\theta) = a^2 \sin\theta(1+\cos\theta)$ となり $f(\theta)$ の最大値を調べるのには

$f(\theta) = \sin\theta(1+\cos\theta)$ の増減を調べれば十分である ただし $0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$ である

$$
\begin{aligned}
f'(\theta) &= \cos\theta(1+\cos\theta) + \sin\theta \cdot -\sin\theta \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta + \cos\theta \\
&= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) + \cos\theta \\
&= 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \\
&= (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)
\end{aligned}
$$

$a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{1}{2}\right)$

$\begin{matrix} 2 & & -1 \\ 1 & & 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 2 & -1 \\ & 2 \end{matrix}$

$f'(\theta) = 0$ とすると $\cos\theta = \frac{1}{2}, -1$ のときで その時の $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi$

$\theta \neq \pi$ より $\theta = \frac{\pi}{3}$ そのとき $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

増減表をかくと

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$
$f'(\theta)$	/	$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	/	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

となり $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最大となる