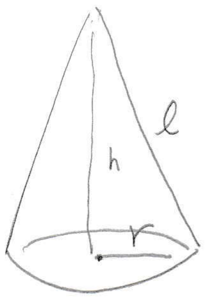
容積が一定 V である直円錐の形をしたじょうごの高さ h, および側高 l は, じょうごの口の半径を r とすれば, それぞれ r についてのどんな式で表されるか。また, 材料を最も経済的に使うためには作られたじょうごの側高と口の半径の比をどのように定めたらよいか。 〔東京大〕



$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow \underline{h=\frac{3V}{\pi r^2}}$ …①

$\ell^2=r^2+h^2$

$\ell^2=r^2+\frac{9V^2}{\pi^2 r^4}$

$\therefore \underline{\ell=\sqrt{r^2+\frac{9V^2}{\pi^2 r^4}}}$ …②

側面積を最小にすればよい 側面積を r の関数 $S(r)$ とすると

$S(r)=\pi\ell r$ より ①,②から

$S(r)=\pi r\sqrt{r^2+\frac{9V^2}{\pi^2 r^4}}$

$S(r)=\pi\sqrt{r^4+\frac{9V^2}{\pi^2 r^2}}$

この関数の最大最小値を求めるのは

根号の中を調べれば十分であるから

$f(r)=r^4+\frac{9V^2}{\pi r^2}$ とし

$f'(r)=4r^3-\frac{18V^2}{\pi^2 r^3}$

$=\frac{4\pi^2 r^6-18V^2}{\pi^2 r^3}$

$4\pi^2 r^6-18V^2=0$

$r^6=\frac{9V^2}{2\pi^2}$

$\therefore r=\sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$ で極値をとる

r	…	$\sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$	…
$f'(r)$	$-$	0	$+$
$f(r)$	↘	極小	↗

$r=\sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$ より

$2\pi^2 r^6=9V^2$ を②に代入すると

$\ell=\sqrt{r^2+\frac{2\cancel{\pi^2}\cancel{r^6}r^2}{\cancel{\pi^2}\cancel{r^4}}}$

$\ell=\sqrt{3r^2}$ より

$\ell^2=3r^2$

$\ell^2:r^2=3:1$

$\therefore \underline{\ell:r=\sqrt{3}:1}$